l'Hopitals regel
Et bevis for tilfældet 0/0

Kristian Jerslev

10. december 2008

I tilfældet, hvor man skal tage grænseværdien for et udtryk $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$, hvor $f(c) = g(c) = 0$ benyttes l'Hopitals regel til at finde grænseværdien. l'Hopitals regel lyder som følger.

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Beviset for tilfældet 0/0 er som følger.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\lim\limits_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \lim_{x\to c}\frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}} \\ = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

Betydningen af denne regel er, at har man problemer med at finde grænseværdien for en bestemt brøk kan man differentiere tæller og nævner og se om den nye brøk er nemmere. Viser det sig ikke at være tilfældet kan man blot fortsætte differentiationen indtil man opnår et udtryk, der kan bruges. Nedenfor er vist et eksempel.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 1}\frac{1-k^5}{1-k^3} &= \lim_{k\to 1}\frac{\frac{\partial(1-k^5)}{\partial k}}{\frac{\partial(1-k^3)}{\partial k}} = \lim_{k\to 1}\frac{-5k^4}{-3k^2} \\ &= \lim_{k\to 1}\frac{\frac{\partial(-5k^4)}{\partial k}}{\frac{\partial(-3k^2)}{\partial k}} = \lim_{k\to 1}\frac{-20k^3}{-6k} \\ &= \lim_{k\to 1}\frac{20k^2}{6} = \frac{20\cdot 1^2}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}\end{aligned}$$