
Formelsamling

Matematik på højniveau
version 2.0

af Daniel Thaagaard Andreasen &
Kristian Jerlsev

Aarhus Universitet
Institut for Fysik og Astronomi

Indhold

1 Forord	2
2 Potensregneregler	3
3 Kvadratsætninger	4
4 Andengradsligning	5
4.1 Generelle løsning	5
4.2 Nulreglen	5
4.3 Faktorisering af andengradsligning	6
4.3.1 faktorisering af n 'te gradsligning	6
5 Funktions analyse	7
5.1 Den lineære funktion	7
5.2 Den eksponentielle funktion	7
5.2.1 Halverings- og fordoblingskonstant	8
5.3 Potens funktionen	8
6 Trigonometri	9
6.1 Retvinklede trekanter	9
6.1.1 Trigonometriske sammenhænge	9
6.2 Vilkårlige trekanter	9
7 Grænseværdi	11
7.1 Regneregler	11
7.2 L'Hospitals regel	11
8 Infinitesimalregning	12
8.1 Differentialregning	12
8.1.1 Generelle regneregler	12
8.1.2 Nyttige regneregler	13
8.2 Integralregning	13
8.2.1 Ubestemt integral	13
8.2.2 Bestemt integral	14
8.2.3 Areal- og volumenfunktion	14
8.3 Hyppige integraler	15
9 Vektorregning	16
9.1 Regneregler	16
10 Nyttige kommandoer til TI-89	18

1 Forord

Denne formelsamling er lavet til alle der har matematik på højniveau og som måske har lidt svær ved at huske alle de små regler. Jeg har prøvet at forklar de mange formler og lave enkelte eksempler i formelsamlingen, men ikke så meget, at det bliver en egentlig bog. Pga. tidspres er der nogle ting som jeg ikke har nået, hvoraf det vigtigste emne for dem der har Mat A er differentiaalligninger desværre ikke er kommet med, så det er klar til jeres skriftlig eksamen. Vektorregnings afsnittet er måske heller ikke det bedste, men det er min intention at gøre dette afsnit færdigt, så dem der skal til eksamen næste år har det klart. Jeg modtager gerne mails med kommentare, både ris og ros, eller evt. rettelser. Jo mere kritik jeg får, desto bedre kan den blive til de kommende årgange. Mails kan sendes til følgende adresse daniel.andreassen@hotmail.com eller jerslev@phys.au.dk.

Ændringer siden version 1.1

- Et helt kapitel om brug af lommeregner er tilføjet.
- Få rettelser i tekst.
- T_EX filen er nu også kompitabel med linux.

Ændringer siden version 1.0

- Korrekturlæst.
- Æstetiske ændringer samt enkelte tilføjelser.

2 Potensregneregler

Potensregneregler kan være svære at holde styr på, så her er nogle generelle udtryk samt et par eksempler.

$$a^n a^m = a^{n+m} \quad (2.1)$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (2.2)$$

$$a^n b^n = (ab)^n \quad (2.3)$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (2.4)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (2.5)$$

$$ma^{-n} = \frac{m}{a^n} \quad (2.6)$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \quad (2.7)$$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (2.9)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (2.10)$$

$$a^n \pm b^n = a^n \pm b^n \quad (2.11)$$

$$a^n b^m = a^n b^m \quad (2.12)$$

Ligning (2.11)¹ og (2.12) er for at vise, at de **IKKE** kan reduceres yderligere. Læg mærke til, at ligning (2.5) er et specielt tilfælde af ligning (2.6), det samme gælder (2.9) og (2.10). Her kommer et par eksempler.

$$\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Undervejs har jeg brugt ligning (2.2) og (2.5)

$$\sqrt[4]{a^8} = a^{\frac{8}{4}} = a^2$$

Her har jeg brugt (2.10).

¹hvis der står $a^n - b^n = a^2 - b^2$ kan den reduceres vha. 3. kvadratsætning

3 Kvadratsætninger

Kvadratsætninger ser ud på følgende måde:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad (3.1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \quad (3.2)$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \quad (3.3)$$

I ord bliver (3.1): *Kvadratet på en toleddet sum er lig med kvadratet på første led plus kvadratet på andet led plus det dobbelte produkt.*

På samme vis bliver (3.2): *Kvadratet på en toleddet differens er lig med kvadratet på første led plus kvadratet på andet led minus det dobbelte produkt.*

Til sidst har vi (3.3): *To tals sum ganget to tals differens er lig med kvadratet på første led minus kvadratet på andet led.*

Her et to eksempler

$$\begin{aligned} (2a + 3b)^2 &= (2a)^2 + (3b)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b \\ &= 4a^2 + 9b^2 + 12ab \end{aligned}$$

og

$$4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$$

4 Andengradsligning

I dette afsnit vil jeg kun behandle den generelle løsning samt løsning ved brug af nulreglen når dette er muligt. Endvidere vil jeg kort komme ind på formlen før faktorisering.

4.1 Generelle løsning

Hvis et andengradsligning er på formen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

er den tilhørende generelle løsning

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \quad (4.1)$$

hvor

$$d = b^2 - 4ac$$

kaldes diskriminanten. Diskriminanten fortæller noget om antallet af løsninger². Der gælder følgende:

$$d < 0 \quad \text{ingen løsninger} \quad (4.2)$$

$$d = 0 \quad \text{én løsning} \quad (4.3)$$

$$d > 0 \quad \text{to løsninger} \quad (4.4)$$

4.2 Nulreglen

Generelt siger nulreglen at, hvis

$$a \cdot b = 0 \quad (4.5)$$

så er enten a eller b lig med 0. Husk på, at a og b godt kan være to parentesers produkt, så der kan godt stå $(ax + by)(cx + dy) = 0$ så skal der gælde at $ax + by = 0$ eller $cx + dy = 0$ Nulreglen kan bruges i det tilfælde hvor $c = 0$ i vores andengradsligning, så der står

$$ax^2 + bx = 0 \quad (4.6)$$

Denne kan løses ved at sætte x uden for en parentes.

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow \quad (4.7)$$

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow \quad (4.8)$$

$$x = 0 \quad \vee \quad ax + b = 0 \Leftrightarrow \quad (4.9)$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{b}{a} \quad (4.10)$$

Dette er løsningerne til en andengradsligning, når $c = 0$.

²I det tilfælde hvor man kun kigger på reelle løsninger, dvs. $x \in \mathbb{R}$.

4.3 Faktorisering af andengradsligning

Ved en faktorisering er andengradsligningen skrevet op i faktorer i stedet for en sum. Man kan vise at $f(x) = ax^2 + bx + c$ kan skrives som

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (4.11)$$

hvor x_1 og x_2 er rødder i dette polynomium. Altså kan man finde et andengradspolynomium hvis man har et punkt $P(x_p, f(x_p))$ og de to rødder ved at sætte det hele ind i (4.11).

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow \\ f(x_p) &= a(x_p - x_1)(x_p - x_2) \Leftrightarrow \\ a &= \frac{f(x_p)}{(x_p - x_1)(x_p - x_2)} \end{aligned}$$

Jeg har isoleret a , da det er hvad man typisk skal finde. Man kan finde b og c ved at finde produktet af de to parenteser i (4.11).

4.3.1 faktorisering af n 'te gradsligning

generelt gælder der, at et polynomium af grad n

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad \text{hvor } a_n \neq 0 \quad (4.12)$$

kan skrives som

$$p(x) = a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) \quad (4.13)$$

hvor $x_1 \dots x_n$ er rødder i polynomiet

5 Funktions analyse

Her vil jeg se på de tre kendte funktion, den lineære funktion, den eksponentielle funktion og potens funktionen.

5.1 Den lineære funktion

Den lineære funktion er af typen

$$y = ax + b \quad (5.1)$$

hvor a er hældningskoefficienten og b er skæring med y -aksen³. Hvis man har to punkter $P(x_1, y_1)$ og $P(x_2, y_2)$ kan man finde den fulde løsning for y . Først finder man a

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (5.2)$$

nu kan man finde b ud fra følgende formel.

$$y_1 = ax_1 + b \Leftrightarrow \quad (5.3)$$

$$b = y_1 - ax_1 \quad (5.4)$$

Man kan sagten bruge y_2 og x_2 hvis dette er nemmere, man må bare ikke blande punkterne sammen.

5.2 Den eksponentielle funktion

Den eksponentielle funktion er givet ved

$$y = ba^x \quad (5.5)$$

Her fortæller a om grafen for y er voksende, konstant eller aftagende. a kaldes for frem-skrivningsfaktoren og er givet ved

$$a = 1 + r \quad (5.6)$$

hvor r er den procent hvormed grafen for y vokser/aftager. Der gælder følgende tre ting.

1. Hvis $r < 0 \Rightarrow a < 1$ er funktionen aftagende
2. Hvis $r > 0 \Rightarrow a > 1$ er funktionen voksende
3. Hvis $r = 0 \Rightarrow a = 1$ er funktionen konstant, da $y = b1^x = b$. Der gælder generelt at $1^n = 1$ for $n \in \mathbb{R}$ Dette gælder også for komplekse tal

Også her er b skæring med y -aksen. Det ses ved at sætte $x = 0$

$$y = ba^0 = b$$

her gælder det også generelt at $n^0 = 1$ for $n \in \mathbb{R}$ ⁴

Hvis to punkter er givet $P(x_1, y_1)$ og $P(x_2, y_2)$ kan man finde den fulde løsning for y . Først finder man a

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} \quad (5.7)$$

³Dette ses ved at sætte $x = 0$

⁴Dette gælder også for komplekse tal

Herefter bestemmer man b ved at indsætte ét punkt og den kendte værdi for a .

$$y_1 = ba^{x_1} \Leftrightarrow \quad (5.8)$$

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} \quad (5.9)$$

Igen kan man også bruge det andet punkt.

5.2.1 Halverings- og fordoblingskonstant

Halveringstiden findes ved at sige:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} \quad (5.10)$$

og fordoblingskonstanten finder man ved at sige:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} \quad (5.11)$$

5.3 Potens funktionen

Potensfunktionen er givet ved:

$$y = bx^a \quad (5.12)$$

Her er b ikke længere skæring med y -aksen; derimod findes det når $x = 1$ da

$$y = b1^a = b$$

Dvs. at punktet $P(1, b)$ findes på en potensfunktions graf.

hvis to punkter er givet $P(x_1, y_1)$ og $P(x_2, y_2)$ kan man finde den fulde løsning for y . Først finder man a

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} \quad (5.13)$$

Nu kan man finde b

$$b = \frac{y_1}{x_1^a} \quad (5.14)$$

6 Trigonometri

Trigonometri er geometri for trekanter. Her vil jeg først behandle retvinklede trekanter og derefter vilkårlige trekanter. Summen af alle vinkler i en trekant er konstant, nemlig

$$A + B + C = 180^\circ \quad (6.1)$$

6.1 Retvinklede trekanter

I en retvinklet trekant $\triangle ABC$ kaldes de to kateter a og b og hypotenusen kaldes c . I en retvinklet trekant gælder der

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (6.2)$$

hvor (6.2) kaldes pythagoras lærersætning for retvinklede trekanter.

Arealet for en retvinklet trekant findes nemt, da det for en vilkårlig trekant er

$$A = \frac{1}{2}hg = \frac{1}{2}ab \quad (6.3)$$

6.1.1 Trigonometriske sammenhænge

De trigonometriske sammenhænge handler om brugen af \cos , \sin og \tan . Jeg vil her kort skrive op hvad der gælder af sammenhænge i en retvinklet trekant.

$$\cos(A) = \frac{\text{Hosliggende katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{b}{c} \quad (6.4)$$

$$\sin(A) = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hypotenusen}} = \frac{a}{c} \quad (6.5)$$

$$\tan(A) = \frac{\text{Modstående katete}}{\text{Hosliggende katete}} = \frac{a}{b} \quad (6.6)$$

Et par små huskeregler som man tit kan bruge til reduktion er

$$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$$

$$\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$$

$$2 \cos(A) \sin(A) = \sin(2A)$$

Nogle gange regnes der i radianer og så er det godt at vide, hvad det egentlig er.

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \Leftrightarrow$$
$$1^\circ = \frac{\pi}{180 \text{ rad}}$$

6.2 Vilkårlige trekanter

For vilkårlige trekanter gælder pythagoras ikke, men man kan heldigvis udlede nogle relationer mellem \sin og \cos , disse kaldes hhv. sinusrelationen og cosinusrelationen og ser ud på følgende måde, først sinusrelationen

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (6.7)$$

og her kommer cosinusrelationen

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C\end{aligned}\tag{6.8}$$

Arealet kan nu findes ud fra følgende formel

$$A = \frac{1}{2}bc \sin(A) = \frac{1}{2}ac \sin(B) = \frac{1}{2}ab \sin(C)\tag{6.9}$$

Det ses at cosinusrelationen og sinusrelationen giver os nogle formler, så vi kun behøver tre kendte informationer for at finde alt andet der har med trekanten at gøre

7 Grænseværdi

En grænseværdi er den værdi en funktion går imod, når den variable går mod en bestemt værdi. Det kan skrives matematisk på følgende måde

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (7.1)$$

som læses: *grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod a er lig med $f(a)$.*

Ofte er man interesseret i at finde den værdi når $x \rightarrow \pm\infty$; dette gør man fordi, man ikke må indsætte $\pm\infty$ i et funktionsudtryk.

7.1 Regneregler

Her er nogle få regneregler, som måske giver sig selv, men det er altid godt at se dem.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (7.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (7.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (7.4)$$

7.2 L'Hospitals regel

Hvis man skal finde en grænseværdi for en brøk og den går mod:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad (7.5)$$

eller

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad (7.6)$$

siger L'Hospitals regel at man må differentiere $f(x)$ og $g(x)$ hver for sig, for derefter at prøve at finde grænseværdien igen, altså

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d^n}{dx^n} f(x)}{\frac{d^n}{dx^n} g(x)} \quad (7.7)$$

Man stopper selvfølgelig når man har fundet en grænseværdi.

Jeg vil lige sige, at L'Hospitals regel IKKE er gymnasiestof, men meget nyttig at kunne.

8 Infinitesimalregning

Infinitesimalregning er en af de vigtigste grene i matematikkens verden og består af to store områder, nemlig differentialregning og integralregning. Infinitesimalregning er meget anvendt inden for fysik og andre naturvidenskabelige fag. Jeg vil i dette kapitel først komme ind på nogle regler om differentialregning for derefter at fortælle om integralregning samt regneregler.

8.1 Differentialregning

For at kunne differentiere en funktion $f(x)$ i et interval $[a; b]$ skal funktionen være kontinueret og differentiabel i dette interval.

Når man differentiere en funktion $f(x)$ i et bestemt punkt x_0 finder man hældningen af tangenten. Dette betegnes på to måder, hvor jeg primært benytter mig af den første fordi det er tydeligt, hvad der differentieres med hensyn til:

$$\frac{d}{dx}f(x_0) = f'(x_0) = a \quad (8.1)$$

hvor a er hældningen for tangenten til $f(x)$ i x_0 .

Forskriften for tangenten findes ud fra følgende formel

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (8.2)$$

8.1.1 Generelle regneregler

Her kommer et lille afsnit om nogle generelle regneregler for differentiation af én og to funktioner.

$$\frac{d}{dx}c \cdot f(x) = c \cdot \frac{d}{dx}f(x) \quad (8.3)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) \quad (8.4)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) + f(x) \frac{d}{dx}g(x) \quad (8.5)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) - f(x) \frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2} \quad (8.6)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dx}g(x) \frac{d}{dx}f(g(x)) \quad (8.7)$$

hvor både $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerte og differentiable funktioner.

Formel (8.7) er den sværste at forstå, så jeg forklare den lige. Hvis man skal differentiere en sammensat funktion, skal man først tage den indre differentieret gange på den ydre differentieret taget på den indre. For god ordens skyld kommer der et eksempel.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cos(3x^3)) &= \frac{d}{dx}3x^3 \cdot \frac{d}{dx}\cos(3x^3) \\ &= 9x^2 \cdot (-\sin(3x^3)) \\ &= -9x^2 \cdot \sin(3x^3) \end{aligned}$$

Her var den indre funktion $f(x) = 3x^3$ og den ydre funktion var $g(y) = \cos(y)$

8.1.2 Nyttige regneregler

Foruden de generelle regneregler ovenfor er der mange regneregler alt efter hvilken slags funktion man skal differentiere. Jeg har her valgt dem ud, som jeg mener er vigtigst at kunne.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}c &= 0 & c \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1} \\ \frac{d}{dx}e^{ax} &= ae^{ax} \\ \frac{d}{dx}\cos(x) &= -\sin(x) \\ \frac{d}{dx}\sin(x) &= \cos(x) \\ \frac{d}{dx}\tan(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ \frac{d}{dx}a^x &= \ln(a)a^x & a > 0 \\ \frac{d}{dx}\sqrt{x} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \frac{d}{dx}\sqrt[n]{x^m} &= \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}} \\ \frac{d}{dx}\ln(x) &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

8.2 Integralregning

Der findes to former for integraler; det bestemte og det ubestemte. Det bestemte integral giver os et tal, som tolkes som arealet under en funktion i et interval. De ubestemte integral giver os en stamfunktion til vores oprindelige funktion.

8.2.1 Ubestemt integral

Først kommer nogle generelle regneregler for ting man må gøre ved et ubestemt integral.

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx \quad (8.8)$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (8.9)$$

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = f(x) \int g(x) dx - \int f'(x) dx \int g(x) dx \quad (8.10)$$

Bemærk at det kun er generelle regneregler. Mere specifikke regneregler kommer længere nede.

8.2.2 Bestemt integral

Hvis $F(x)$ er stamfunktionen til $f(x)$ i et interval $[a; b]$, kan man finde det bestemte integral ved at integrere $f(x)$ i dette interval. Det betegnes og regnes på følgende måde.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (8.11)$$

Ved det bestemte integrale gælder selvfølgelig de samme regneregler som ved et ubestemt integrale; forskellen er, at man får hhv. en funktion og et tal.

8.2.3 Areal- og volumenfunktion

Man kan bruge integralregning til bestemmelse af arealer under/mellem funktioner, samt at finde volumen af en funktion der roteres om en fast akse.

Først ser vi på arealet under en funktion. Hvis en funktion $f(x)$ ligger over x -aksen i et interval $[a; b]$ finder man simpelthen arealet under grafen for $f(x)$ ved at integrere.

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (8.12)$$

Hvis funktionen ligger under x -aksen skal man tage den numeriske værdi for at finde arealet over funktionen. Og hvis den i intervallet $[a; b]$ krydser x -aksen er det vigtigt, at man finder det bestemte integral fra nulpunkt til nulpunkt.

Lad for en funktion $f(x)$ være n nulpunkter i det interval vi vil finde arealet under/over grafen⁵ og lad os kalde disse nulpunkter for $x_1 \dots x_n$, da er arealet givet ved

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right| \quad (8.13)$$

Der er sat numerisk tegn for at sikre et positivt areal. I praksis skal man nok ikke have numerisk tegn ved alle ledende, men det kan være.

Nu kommer der lige lidt om det volumen man kan få fra en funktion. Hvis man roterer

en funktion $f(x)$ 360° rundt om x -aksen kan man finde det volumen den fremkomne figur har skabt. Man kan forestille sig en ret linie gennem origo drejet rundt om x -aksen vil danne en kegle, og på den måde, kan man komme frem til hvad volumen af en kegle er. Det generelle udtryk er:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \quad (8.14)$$

Læg mærke til at $f(x)$ er kvadreret og husk π uden for integralet.

⁵alt efter om funktionen er over eller under x -aksen

8.3 Hyppige integraler

Her kommer en bunke af integraler som er gode at kunne. Det skal lige siges, at der i alle tilvælde skal være plus en konstant, men dette undlader jeg med vilje.

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (8.15)$$

$$\int k dx = kx \quad (8.16)$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx}$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln(|\cos(x)|)$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln(k)}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3}$$

$$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \frac{mx^{m/n+1}}{m+n}$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$$

$$\int \log(x) dx = x(\log(x) - \log(e))$$

Læg mærke til, at 8.16 er en konsekvens af 8.15, da $k = k \cdot 1 = k \cdot x^0$, hvor jeg herfra kan bruge regel 8.8.

9 Vektorregning

I dette afsnit vil jeg behandle vektorer i n dimensioner, selvom man kun har om 2 og 3 dimensioner i gymnasiet. Dette er dog intet problem, hvilket man kan se ud fra formlerne. En vektor er egentlig bare en pil, som har to egenskaber; den har en længde og den har en retning. En vektor er ikke bundet til noget fast punkt i et koordinatsystem, hvilket er en stor hjælp, når man skal finde en sum af vektorer eller beregne vinkler imellem to vektorer.

Nu et kig på hvordan en vektor egentlig ser ud.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

hvor a_1, a_2, \dots, a_n kaldes indgange i \vec{a} .

9.1 Regneregler

Her vil vi se på nogle generelle regneregler, bl.a addition, subtraktion, skalarmultiplikation mm. Først kommer noget addition.

Hvis vi har to vektorer \vec{a} og \vec{b} er summen/differensen af dem:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

Altså er en sum/differens af to vektorer blot summen/differensen af indgangene.

Man kan også gange en skalar⁶ på en vektor ved at gange skalaren ind på alle indgange, dette skrives således

$$n \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} n \cdot a_1 \\ n \cdot a_2 \\ \vdots \\ n \cdot a_n \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

Nu vil vi også se på et „produkt“ af to vektorer. Dette er kaldet et skalarprodukt og er givet ved:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad (9.4)$$

$\sum_{i=1}^n a_i b_i$ er nok en ny notation for mange, men det betyder bare summen af de forskellige indgange ganget sammen. Det egendommelige ved et skalarprodukt er, at man ikke får en ny vektor, men en skalar. Man kan bruge skalarproduktet til at finde vinklen mellem to vektorer, men først skal vi lige se på hvordan man finder længden af en vektor.

Længden finder man vha. Pythagoras' læresætning om retvinklede trekanter.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \quad (9.5)$$

⁶dette er bare et andet ord for „tal“

Nu er vi klar til at finde vinklen mellem to vektorer. Det er den vinkel der er mellem dem, når de starter i samme punkt.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cdot \cos(\theta) \Leftrightarrow \quad (9.6)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \quad (9.7)$$

Nu skal vi se lidt på krydsproduktet, men kun i 3 dimensioner. Det er givet ved

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

Hvis man krydser to vektorer får man en vektor der er ortogonal på den plan de to vektorer udspænder. Man kan også finde arealet af det parallelogram de to vektorer udspænder. Det er givet ved:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\theta) \quad (9.9)$$

hvor θ er vinklen mellem \vec{a} og \vec{b} . Hvis \vec{a} og \vec{b} begynder i samme punkt og man tegner en ret linie fra deres endepunkter så man får en trekant, kan man også finde arealet af denne:

$$\frac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \frac{1}{2} \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\theta) \quad (9.10)$$

10 Nyttige kommandoer til TI-89

Til en skriftlig eksamen er man oftest ret tidspresset, derfor kan man lade sin lommeregner gøre meget af det triste og hårde arbejde. Her kommer nogle kommandoer, der gør livet nemmere for dem der er til eksamen.

Hvis der er problemer med nogle af kommandoerne, kan det være fordi der regnes eksakt, så dette skal skiftes inde i MODE.

solve **F2** → 1

Denne kommando løser en ligning; det kan både være almindelige ligninger såsom $y = ax + b$, andengradsligninger eller mere eksotiske ligninger som $y''(t) = k^7$. Måden man bruger solve på er vist herunder.

$$\text{solve}(y = ax + b, x) \\ x = \frac{y - b}{a}$$

Ovenstående var et eksempel. Men man skriver sit algebraiske udtryk op hvorefter man trykker komma⁸ og så den variabel man ønsker isoleret.

Man kan også løse to ligninger med to ubekendte (eller flere), det gør man på følgende måde

$$\text{solve}(y = ax + b \text{ and } y = cx + d, x, y)$$

Husk de rigtige paranteser rundt om det man løser med hensyn til. Rent grafisk er ovenstående et eksempel på, hvordan man finder skæringen mellem to linier. Det er meget nyttigt, hvis man skal finde skæring mellem to kurver, som man skal finde arealet imellem.

Differentiere **F3** → 1

Hvis man gerne vil differentiere en funktion $f(x)$ kan din lommeregner også gøre det. Man skriver blot

$$d(f(x), x) = f'(x)$$

Man kan også finde det specielle d ved, at trykke på den blå knap og så 8.

Integrere **F3** → 2

Lommeregneren kan også sagtens integrere. Dette gøres på næsten samme måde som at differentiere.

$$\int (f(x), x, a, b) = \int_a^b f(x) dx$$

Man finder integraletegnet ved at trykke den blå knap efterfulgt af 7. a og b er grænserne på det bestemte integrale. Hvis man vil regne ubestemt indtaster man blot uden grænserne, dvs.

$$\int (f(x), x) = \int f(x) dx$$

Vær opmærksom på, at når TI-89 regner ubestemt medtager den ikke en ekstra konstant, det skal man selv huske.

⁷senere kommer et lille afsnit om flere kommandoer samtidig

⁸den der ligger lige under T

Differentialligninger **F3** → **C**

Her kommer der lidt om, hvordan man løser en differentialligning, hvis man har fået en initialværdi, dvs. $y(t_0) = y_0$.

$$\text{deSolve}(y' = ky \text{ and } y(t_0) = y_0, t, y)$$

Her er der nogle ting der er vigtig at huske! Man skal have „and“ med, den kan findes under CATALOG. Det mærke man bruger på y finder man ved at trykke blå knap efterfulgt af =. Til sidst er det vigtigt at huske den rigtige rækkefølge hvormed man løser med hensyn til, dvs. t skal stå før y .

Limit **F3** → **3**

Nogle gange kan det være svært at finde en grænseværdi, så det klare din lommeregner for dig. Indtast blot

$$\text{limit}(f(x), x, a)$$

og så finder du den grænseværdi, hvis der findes en, som $f(x)$ går mod, når x går mod a .

Factor **F2** → **2**

Denne kommando faktoriserer et polynomium

$$\text{factor}(ax^2 + bx + c)$$

Og så får man det på samme form som i (4.11)

Vektorer

Man kan også regne med vektorer, men i modsætning til ovenstående funktioner, kan den her godt være ret tidskrævende, og det anbefales, at man kun bruger nogle af kommandoerne her til at tjekke sit resultat.

At skrive en vektor

Det er hovedsageligt pga. den besværlige syntax at det tager lang tid. Her kommer et eksempel.

$$[[x][y][z]] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

På venstre side er det man skal skrive på sin lommeregner, og resultatet er vist på højre side. Man kan med fordel gemme det i en variabel. Dette gøres ved at trykke STO og så en variable, f.eks. m . Nu laver jeg to vektorer jeg bruger til resten af det afsnit om vektorer. Kommandoerne findes under CATALOG

$$\begin{aligned} [[x][y][z]] \text{ STO } m \\ [[a][b][c]] \text{ STO } n \end{aligned}$$

Altså har jeg to vektorer der er gemt under m og n .

Længden **norm**

Man kan finde længden af en vektor ved at bruge kommandoen *norm*.

$$\text{norm}(m) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Prikprodukt dotP

Man finder prikproduktet på følgende måde.

$$\text{dotP}(m, n) = ax + by + cz$$

Prikprodukt crossP

Her ser I hvordan man finder krydsproduktet.

$$\text{crossP}(m, n) = \begin{bmatrix} cy - bz \\ az - cx \\ bx - ay \end{bmatrix}$$

Vinklen mellem to vektorer

Jeg har endnu ikke fundet en kommando for dette, men det giver mig en mulighed for, at vise hvordan man kan bruge flere kommandoer samtidig. Vinklen mellem to vektorer er givet ved (9.7). Derfor kan det nu skrives som:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\text{dotP}(m, n)}{\text{norm}(m)\text{norm}(n)} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{ax + by + cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$