Formelsamling til Fourieranalyse
10. udgave

Kristian Jerslev og Steven Hayden

13. oktober 2009

Her følger en formelsamling lavet til kurset Fourieranalyse på Aarhus Universitet. Bemærk venligst, at samlingen indeholder sætninger og formler, der er relevant for opgaveløsning, hvorfor ikke alle sætninger og formler er medtaget. Visse sætninger har ikke nogen relevans for opgaveløsning og visse sætninger forudsættes kendte. Formler og sætninger er hentet fra notekompendiet *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*. Fejl, forslag til forbedringer og lign. bedes henvendt til Kristian Jerslev, jerslev@phys.au.dk.

Nye og opdaterede udgaver vil altid kunne hentes fra
www.k-jerslev.dk/docs/formelsamling.pdf.

Ændringer fra 9. til 10. udgave

Slåfejl rettet i formel (28) ($\widehat{f}(x) \to \widehat{f}(\lambda)$) (Tak til Ole).

Ændringer fra 8. til 9. udgave

Fortegnsfejl rettet i formel (19) (Tak til Bent).

Ændringer fra 7. til 8. udgave

Tilføjet mindre uddybning om komplekse fourierkoefficienter for negative værdier af k (formel (22)) (Tak til Jan).
Fortegnsfejl rettet i formel (33) (Tak til Daniel).

Ændringer fra 6. til 7. udgave

Fejl rettet i formel (17).

Ændringer fra 5. til 6. udgave

Stavefejl rettet i afsnittet om Plancherels sætning. Notationen i afsnittet om Egenskaber ved Fouriertransformationen er blevet omskrevet.

Ændringer fra 4. til 5. udgave

Kosmetiske tilrettelser. Tilføjet afsnit om Fouriertransformationen af lige og ulige funktioner. Fejl rettet i ligning 13.

Det indre produkt i L^2

Definition 0.5 om det indre produkt i rummet L^2. På intervallet $L^2([a, b])$ er det indre produkt af to funktioner, $f(x)$ og $g(x)$ defineret som:

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\ dx \tag{1}$$

Generelt om Fourierrækker

Sætning 1.2 om Fourierrækker. For en given funktion $f(x)$, der er 2π periodisk, vil Fourierrækken være givet ved:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \tag{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx \tag{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ dx \tag{4}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ dx \tag{5}$$

Fourierrækker på generelle intervaller

Sætning 1.4 om Fourierrækker på generelle intervaller. For en given funktion $f(x)$, der er $2a$ periodisk på intervallet $-a \le x \le a$ vil Fourierrækken være givet ved:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\right] \tag{6}$$

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\ dx \tag{7}$$

$$a_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\ dx \tag{8}$$

$$b_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\ dx \tag{9}$$

Fourierrækker for lige og ulige funktioner

Sætning 1.8 om Fourierrækker for lige og ulige funktioner. For en given lige funktion $f(x)$ vil Fourierrækken på intervallet $[-a, a]$ være givet ved:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \tag{10}$$

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)\ dx \tag{11}$$

$$a_k = \frac{2}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\ dx \tag{12}$$

Hvis $f(x)$ er en ulige funktion på førnævnte interval er Fourierrækken givet ved:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \tag{13}$$

$$b_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\,dx \tag{14}$$

Er funktionen $f(x)$ kun defineret på et halvinterval giver dette ikke noget problem. Fourierrækken på det halve interval kan udtrykkes som enten en cosinus- eller en sinusrække. For at udtrykke $f(x)$ som en cosinusrække udvides $f(x)$ blot som en lige funktion og derefter findes Fourierrækken som vist ovenfor for lige funktioner. Tilsvarende for en udvidelse som ulige funktion.

Fourierrækker på kompleks form

For ethvert reelt tal, t, er den komplekse eksponentialfunktion givet som:

$$e^{it} = \cos t + i\sin t \tag{15}$$

Sætning 1.18 om Fourierrækker på kompleks form. Fourierrækken for en given funktion $f(x)$ på intervallet $[-\pi, \pi]$ er på kompleks form givet ved:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx} \tag{16}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \tag{17}$$

Ønskes en omregning fra kompleks til reel Fourierrække benyttes følgende sammenhæng:

$$a_0 = \alpha_0 \tag{18}$$

$$a_k = \alpha_k + \alpha_{-k} \tag{19}$$

$$b_k = i(\alpha_k - \alpha_{-k}) \tag{20}$$

Hvor α_k, b_k og a_k er givet som vist tidligere.

Ønskes en omregning fra reel til kompleks Fourierrække benyttes følgende sammenhæng:

$$\alpha_0 = a_0 \tag{21}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \tag{22}$$

Hvis $f(x)$ tager reelle værdier, vil de kompleksekoefficienter for negative værdier af k være givet ved

$$\alpha_{-k} = {\alpha_k}^*,$$

hvor stjernen angiver komplekskonjungering.

Konvergens for Fourierrækker

Punktvis konvergens

Sætning 1.28 om punktvis konvergens. Hvis funktionen $f(x)$ er periodisk og stykkevis kontinuert og punktet x er et punkt, hvor f er både venstre- og højredifferentiabel, men ikke nødvendigvis kontinuert, siges Fourierrækken at konvergerer imod:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{23}$$

Dermed sagt, at ved et diskontinuert punkt konvergerer Fourierrækken imod middelværdien af grænserne fra højre og venstre. Er f kontinuert er middelværdien det samme som funktionsværdien i punktet x.

Uniform konvergens

Sætning 1.30 om uniform konvergens. Hvis $f(x)$ er en stykkevis glat og 2π periodisk funktion vil Fourierrækken konvergerer uniformt mod $f(x)$.

Givet en funktion $g(x)$, der opfylder ovenstående krav er den dermed også kontinuert. Som følge af sætning 1.28 vil en uniform konvergent Fourierrække dermed også være punktvis konvergent. Vær opmærksom på, at det modsatte ikke gælder.

For en uniform konvergent Fourierrække er det tilladt at sætte lighedstegn mellem Fourierrækken og funktionen selv. Givet $f(x)$ er en funktion med Fourierrækken $\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right))$ er det dermed tilladt at skrive $f(x) = \tilde{f}(x)$

L^2 konvergens

Sætning 1.35 om L^2 konvergens. Givet $f(x)$ er en funktion i $L^2([-\pi,\pi])$ vil funktionens Fourierrække konvergere mod $f(x)$ i L^2 forstand.

Sætning 1.36 om kompleks L^2 konvergens. Givet $f(x)$ er en funktion i $L^2([-\pi,\pi])$ med komplekse Fourierkoefficienter, α_k vil partialsummen

$$f_N(x) = \sum_{k=-\infty}^{N} \alpha_k e^{ikx} \tag{24}$$

konvergere mod $f(x)$ i L^2 forstand, når $N \to \infty$.

Parsevals ligninger

Sætning 1.39 om Parsevals ligning på reel form. Antaget $f(x)$ har Fourierrækken $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \in L^2[-\pi,\pi]$ vil følgende identitet gælde:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = 2|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2) \tag{25}$$

Dette udtryk bruges som oftest til at finde en værdi for summen af uendelige rækker.

Sætning 1.40 om Parsevals ligning på kompleks form. Antaget $f(x)$ har Fourierrækken $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx} \in L^2[-\pi, \pi]$ vil følgende identitet gælde:

$$\frac{1}{2\pi}||f||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 \tag{26}$$

Yderligere vil der for to funktioner f og $g \in L^2[-\pi, \pi]$ gælde:

$$\frac{1}{2\pi}\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k} \tag{27}$$

Hvor α_k er de komplekse Fourierkoefficienter, der hører til funktionen $f(x)$ og β_k er de komplekse Fourierkoefficienter, der hører til $g(x)$.

Fouriertransformation

Sætning 2.1 om Fouriertransformation og den inverse Fouriertransformation. For en kontinuert og differentiabel funktion $f(x)$ med $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx < \infty$ vil følgende gælde:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x}\ d\lambda \tag{28}$$

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\ dx \tag{29}$$

I ovenstående udtryk benævnes $\widehat{f}(x)$ som f's Fouriertransformerede. I det følgende vil en Fouriertransformation blive benævnt $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$.

Egenskaber ved Fouriertransformation

Fra sætning 2.1 fås følgende identitet.

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x) = f(x) \tag{30}$$

Sætning 2.6 om egenskaber ved Fouriertransformationen. Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable funktioner der er defineret på den reelle akse med $f(x) = 0$ for store $|x|$ vil følgende egenskaber for Fouriertransformationen gælde.

- Fouriertransformen og den inverse Fouriertransform er linære operatorer. Det betyder, at for enhver konstant c gælder:

$$\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g] \tag{31}$$

$$\mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f] \tag{32}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f+g] = \mathcal{F}^{-1}[f] + \mathcal{F}^{-1}[g] \tag{33}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[cf] = c\mathcal{F}^{-1}[f] \tag{34}$$

- Fouriertransformationen af et produkt af $f(x)$ med x^n er givet ved:

$$\mathcal{F}[x^n f(x)](\lambda) = i^n \frac{d^n}{d\lambda^n}\mathcal{F}[f](\lambda) \tag{35}$$

- Den inverse Fouriertransformation af et produkt af $\widehat{f}(\lambda)$ med λ^n er givet ved:

$$\mathcal{F}^{-1}[\lambda^n \widehat{f}(\lambda)](x) = (-i)^n \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x) \tag{36}$$

- Fouriertransformationen af n gange differentieret funktion, $f(x)$ er givet ved:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\lambda) = (i\lambda)^n \mathcal{F}[f](\lambda) \tag{37}$$

- Den inverse Fouriertransformation af en n gange differentieret funktion, $\widehat{f}(\lambda)$ er givet ved:

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}^{(n)}](x) = (-ix)^n \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x) \tag{38}$$

- Fouriertransformationen for en vilkårlig transformation langs x-aksen er givet ved:

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a} \mathcal{F}[f](\lambda) \tag{39}$$

- En skaleret funktions Fouriertransformation er givet ved:

$$\mathcal{F}[f(bx)](\lambda) = \frac{1}{b} \mathcal{F}[f] \left(\frac{\lambda}{b} \right) \tag{40}$$

- Hvis $f(x) = 0$ for $x < 0$ så vil Fouriertransformationen af $f(x)$ være givet ved:

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}[f](i\lambda) \tag{41}$$

  Hvor $\mathcal{L}[f]$ er LaPlacetransformationen af $f(x)$ defineret ved:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(x) e^{-xs} \, dx \tag{42}$$

Fouriertransformationen af lige og ulige funktioner.

Hvis $f(x)$ er en lige funktion tager Fouriertransformationen en meget pæn (og reel) form.

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} \, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(\lambda x) \, dx \tag{43}$$

Tilsvarende gælder det, at er $g(x)$ en ulige funktion vil Fourierintegralet tage en ren imaginær form.

$$\mathcal{F}[g](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\lambda x} \, dx = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(\lambda x) \, dx \tag{44}$$

Fouriertransformering af foldninger

Definition 2.9 om foldningen af to funktioner. Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er to kvadrat-integrable funktioner er foldningen, $f * g$ defineret ved:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\ dx \tag{45}$$

Ovenstående er ækvivalent med:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)\ dx \tag{46}$$

Sætning 2.10 om Fouriertransformationen af foldede funktioner. Hvis $g(x)$ og $f(x)$ er to kvadratintegrable funktioner vil Fouriertransformationen af deres foldning være givet ved:

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\widehat{f} \cdot \widehat{g} \tag{47}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} \cdot \widehat{g}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g \tag{48}$$

Mere om Fouriertransformationen som linær operator

Sætning 2.11 om Fouriertransformationen som linær operator. Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er to kvadratintegrable funktioner gælder følgende identitet:

$$\langle \mathcal{F}[f], g \rangle_{L^2} = \langle f, \mathcal{F}^{-1}[g] \rangle_{L^2} \tag{49}$$

Plancherels formel

Sætning 2.12 om Plancherels formel. Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er to kvadratintegrable funktioner gælder følgende indentiteter:

$$\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2} \tag{50}$$

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[f], \mathcal{F}^{-1}[g] \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2} \tag{51}$$

$$||\mathcal{F}[f]||_{L^2} = ||f||_{L^2} \tag{52}$$

Vigtige Fouriertransformationer

Her følger en liste over funktioner og deres Fouriertransform, der er værd at have ved hånden, når opgaver skal løses. Normeringsfaktor fra Fouriertransformation $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ er benyttet.

$f(x)$	$\mathcal{F}\{f(x)\}(\lambda)$
$\begin{cases} 1 & , \quad -b < x < b \\ 0 & \quad \text{ellers} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(b\lambda)}{\lambda}$
$\begin{cases} 1 & , \quad b < x < c \\ 0 & \quad \text{ellers} \end{cases}$	$\frac{e^{-ib\lambda} - e^{-ic\lambda}}{i\lambda\sqrt{2\pi}}$
$\frac{1}{x^2+a^2} \qquad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\|\lambda\|}}{a}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\|\lambda\|}$
$\begin{cases} x & , \quad 0 < x < b \\ 2x - b & , \quad b < x < 2b \\ 0 & \quad \text{ellers} \end{cases}$	$\frac{-1 + 2e^{ib\lambda} - e^{-2ib\lambda}}{\sqrt{2\pi}\lambda^2}$
$\begin{cases} e^{-ax} & , \quad 0 < x < a \\ & \quad a > 0 \\ 0 & \quad \text{ellers} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\lambda)}$
$\begin{cases} e^{ax} & , \quad b < x < c \\ 0 & \quad \text{ellers} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-i\lambda)c} - e^{(a-i\lambda)b}}{\sqrt{2\pi}(a-i\lambda)}$
$\begin{cases} e^{iax} & , \quad -b < x < b \\ 0 & \quad \text{ellers} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(b(\lambda-a))}{\lambda-a}$
$\begin{cases} e^{iax} & , \quad b < x < c \\ 0 & \quad \text{ellers} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ib(a-\lambda)} - e^{ic(a-\lambda)}}{a-\lambda}$
$\begin{cases} c & , \quad a < x < b \\ 0 & \quad \text{ellers} \end{cases}$	$\frac{-ic}{\sqrt{2\pi}\lambda}(e^{-ia\lambda} - e^{-ib\lambda})$
$e^{-ax^2} \qquad a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{\frac{-\lambda^2}{4a}}$
$\frac{\sin(ax)}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad , \quad \|\lambda\| < a; \quad 0 \quad , \quad \|\lambda\| > a$
$\begin{cases} \cos x & , \quad \|x\| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \quad \text{ellers} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}$
$e^{-a\|x\|} \quad , \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{(a^2+\lambda^2)}$
$xe^{-a\|x\|} \quad , \quad a > 0$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2ia\lambda}{(a^2+\lambda^2)^2}$
$\|x\|e^{-a\|x\|} \quad , \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(a^2-\lambda^2)}{(a^2+\lambda^2)^2}$
$xe^{\frac{-x^2}{2}}$	$-i\lambda e^{\frac{-\lambda^2}{2}}$