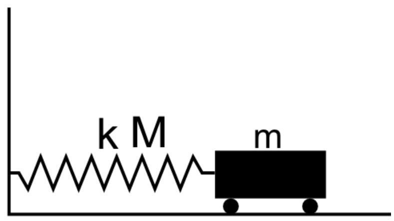
Simpel harmonisk oscillator - nu med fjedermasse

Kristian Jerslev

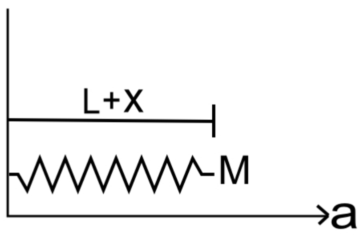
16. oktober 2008

Ved normale beregninger, hvor en fjeder indgår, negliceres fjederens kinetiske energi efterhånden som opstillingen udvikler sig. Er dette en god approksimation eller bør man medtage fjederens masse i sine beregninger? For at give et bud på dette betragtes nedenstående opstilling. En fjeder med massen M og hvilelængden L sidder fast på en vogn med massen m, der kører på et gnidningsfrit underlag. Under normale omstændigheder - det vil sige uden medregning af fjederens masse - vil vognen udføre en simpel harmonisk bevægelse. Vi vil nu analysere opstillingen og medregne fjederens masse.



Visse antagelser er nødvendige for at gøre analysen så simpel som muligt. Jeg vil antage, at fjederens masse er uniformt fordelt over hele fjederen og samtidig antage, at fjederen udvider sig uniformt, når den bevæger sig.

For nu at gøre opstillingen overskuelig vælger vi kun at kigge på fjederen, da det er dennes masse, der er interessant. Den analytiske tilgang ses nedenfor.



Vi betragter en situation, hvor fjederen er blevet strakt x fra sin ligevægtsstilling. For nu at opstille et udtryk for den kinetiske energi skal vi bruge et udtryk for hastigheden af hver en del af fjederen. Det er her, at vi benytter vores antagelse om, at fjederen udvider sig uniformt. Ved uniform udvidelse ved vi, at hastigheden er linær afhængig af afstanden fra væggen, hvor fjederen sidder fast. Denne afstand kaldes på ovenstående figur a. Samtidig ved jeg, at enden længst til højre, igen på ovenstående figur, skal udvide sig med hastigheden $\dot{x}$. Det ses også nemt, at punktet, hvor fjederen sidder fast på væggen ikke skal bevæge sig. Dermed har jeg nu to betingelser for min linære sammenhæng og jeg kan opstille en ligning for hastigheden ved brug af disse.

$$\dot{x}_{ny} = ba \tag{1}$$

$$b = \frac{\Delta \dot{x}}{\Delta a} = \frac{0 - \dot{x}}{0 - (L + x)} = \frac{\dot{x}}{L + x} \Rightarrow \tag{2}$$

$$\dot{x}_{ny} = \frac{\dot{x}}{L + x} a \tag{3}$$

Dette udtryk benyttes nu i ligningen for den kinetiske energi i det vi husker, at massen skal integreres op over hele fjederen. Lad dm være massen af en infinitisimal del af fjederen. Den kinetiske energi for dette lille stykke masse er da.

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}_{ny}^2 dm \tag{4}$$

Integreres op over hele den udstrakte fjeder fås et udtryk for hele fjederens kinetiske energi.

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}_{ny}^2 dm = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{L + x} \right)^2 \dot{x}^2 dm \tag{5}$$

Vi skal skifte integrationsvariabel fra dm til da for at få noget ud af ovenstående udtryk. Dette gøres ved at betragte massefordelingen.

$$dm = \frac{M}{x + L} da \tag{6}$$

Ovenstående indsættes i (5).

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{L + x} \right)^2 \dot{x}^2 dm = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{L + x} \right)^2 \dot{x}^2 \frac{M}{x + L} da \tag{7}$$

$$= \frac{M \dot{x}^2}{2(x + L)^3} \int_0^{L+x} a^2 da \tag{8}$$

$$= \frac{M \dot{x}^2}{2(x + L)^3} \frac{1}{3} (L + x)^3 \tag{9}$$

$$= \frac{1}{6} M \dot{x}^2 \tag{10}$$

Fjederens kinetiske energi er altså givet på samme måde som en almindelig kinetisk energi med den undtagelse, at man benytter en tredjedel af fjederens masse i stedet for hele massen.

For nu at finde ud af hvilken type bevægelse der vil blive udført i opstillingen, som ses øverst, benyttes Lagrangeformalismen. Jeg vil springe de nærmere beregninger over og gå direkte til resultatet af den ene generaliserede koordinat, der er.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{6}M\dot{x}^2 \tag{11}$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{12}$$

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{6}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \tag{13}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m + \frac{1}{3}M}x \tag{14}$$

(14) er den velkendte formel for en harmonisk oscillator med frekvensen $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+\frac{1}{3}M}}$, så vi kan nu konkludere, at effekten af medregningen af fjederens masse er blot, at frekvensen bliver mindre. Den fulde bevægelsesligning fremkommer ved løsning af 2. ordensdifferentialligningen (14) og bliver som følger.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \tag{15}$$