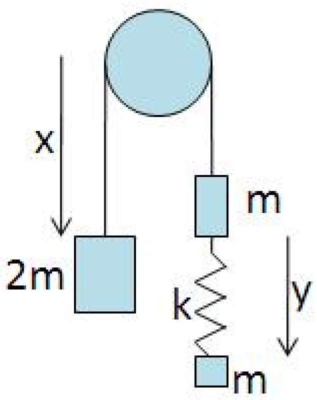
Analyse af modificeret Atwood faldmaskine

Kristian Jerslev

7. oktober 2008

Som endnu et eksempel på anvendeligheden af Lagrangeformalismen betragtes en modifikation af Atwoods faldmaskine. I denne opstilling har vi hængt et lod, der er forbundet til endnu to lodder, der er forbundet med en fjeder, op over en ideel trisse. Opstillingen kan ses nedenfor, hvor de størrelser, vi skal bruge, også fremgår. I det følgende antages, at bevægelserne foregår, så snoren altid er strakt.



Vores første opgave er at bestemme den potentielle og kinetiske energi udtrykt ved de generaliserede koordinater x og y. Dette gøres ved at betragte hvert lod for sig selv. For loddet med massen $2m$ ses det nemt, at den kinetiske energi er givet ved $T_1 = \frac{1}{2} \cdot 2m\dot{x}^2 = m\dot{x}^2$. For det øverste af de to lodder på højre side indses det, at hastigheden af dette lod er lig hastigheden af loddet på venstre side, i det disse to lodder hænger sammen ved hjælp af snoren, som antages at være af konstant længde. Dermed bliver den kinetiske energi for dette lod $T_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Nu kommer den lidt mere komplicerede analyse af den kinetiske energi for loddet for enden af fjederen. For at finde den kinetiske energi af dette lod, skal vi indse, at bevægelsen af fjederen og bevægelsen af det store lod modarbejder hinanden. For at opstille hastigheden for det nederste af de to venstre lodder skal vi altså tage differensen af de to hastigheder $\dot{x}$ og $\dot{y}$, hvoraf vores valg af generaliserede koordinater kommer frem. Opsummeret giver den kinetiske energi af det sidste lod følgende udtryk (prøv eventuelt at finde frem til det selv på baggrund af de nævnte detaljer) $T_3 = \frac{1}{2}m(\dot{x} - \dot{y})^2$. Den kinetiske energi for hele systemet findes nu simpelthen ved at summere de fundne værdier.

$$\begin{aligned} T = \sum_{i=1}^{3} T_i &= m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} - \dot{y})^2 \\ &= 2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - m\dot{x}\dot{y} \end{aligned} \tag{1}$$

Efterfølgende skal vi nu have fundet den potentielle energi for systemet. Jeg vælger nulpunktet for potentiel energi til at være punktet, hvor $x = 0$, så for det store lod bliver den potentielle energi $U_1 = -2mgx$. For det øverste af de to lodder til højre bliver den potentielle energi $U_2 = mg(x - l_s)$, hvor l_s er snorens længde. Fjederens potentielle energi er givet ved standardudtrykket, som vi kender det $T_{fj} = \frac{1}{2}k(y - l_0)^2$ og til slut kigger vi igen på den potentielle energi af det nederste lod på højre side. Det skal nu bemærkes, at positionen af dette lod til alle tider er givet ved $s_3(t) = x(t) - l_s - y(t)$ og dette benyttes til at opskrive den potentielle energi af dette lod. Igen ved brug af det almindelige udtryk for potentiel energi fås $T_3 = mg(x - l_s - y)$. Alle disse potentielle energier lægges sammen for at finde den totale.

$$\begin{aligned} U = \sum_{i=1}^{3} U_i + U_{fj} &= -2mgx + mg(x - l_s) + mg(x - l_s - y) + \frac{1}{2}k(y - l_0)^2 \\ &= -mgy + \frac{1}{2}k(y - l_0)^2 + U_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Ved sammenføjning af (1) og (2) i Lagrangefunktionen opdages en finurlig detalje ved denne opstilling.

$$\mathcal{L} = T - U = 2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - m\dot{x}\dot{y} + mgy - \frac{1}{2}k(y - l_0)^2 - U_0 \tag{3}$$

Det ses, at $\mathcal{L}$ er uafhængig af x og dermed kan x betragtes som en cyklisk koordinat. Det vil vi benytte senere til simplificering af Lagrangeligningerne.

For nu at opstille bevægelsesligningerne for systemet benyttes Lagrangeligningerne. Hvis jeg starter med x-koordinaten fås.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \qquad \text{(da } x \text{ er en cyklisk koordinat)} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt}(4m\dot{x} - m\dot{y}) = 4\ddot{x} - \ddot{y} \Rightarrow \\ 0 &= 4\ddot{x} - \ddot{y} \end{aligned} \tag{4}$$

For y-koordinaten udføres samme operationer.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= mg - k(y - l_0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= \frac{d}{dt}(m\dot{y} - m\dot{x}) = m\ddot{y} - m\ddot{x} \end{aligned} \tag{5}$$

Ved sammenlægning af (4) og (5) for eliminering af x-koordinaten fås.

$$\ddot{y} = \frac{4g}{3} + \frac{4kl_0}{3m} - \frac{4k}{3m}y = c_1 - c_2 y \tag{6}$$

Hvor $c_1 = \frac{4g}{3} + \frac{4kl_0}{3m}$ og $c_2 = \frac{4k}{3m}$.

Da vi nu har opstillet en (differential)ligning for y-koordinaten er det interessant at bemærke, at systemet har en stabilt punkt. Ved et stabilt punkt menes et punkt, hvor $\ddot{y} = 0$ og benyttes dette i ovenstående udtryk kan vi finde fjederens længde i dette stabile punkt.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= 0 \Leftrightarrow \\ c_1 &= c_2 y \Leftrightarrow \\ y &= \frac{gm}{k} + l_0\end{aligned}$$

Nu er det blevet tid til at færdiggøre vores analyse af systemet. Dette gøres ved at finde bevægelsesligningerne for systemet og det kræver en løsning af differentialligningerne (4) og (6). Da (6) ikke er nogen homogen differentialligning skal vi lige udføre en transformation af koordinater, før ligningen kan løses. Dette gøres ved at definere en ny koordinat, $\tilde{y}$ som følger.

$$\tilde{y} = y + b \Leftrightarrow \tag{7}$$

$$y = \tilde{y} - b \tag{8}$$

Differentieres to gange på begge sider af (8) med hensyn til tiden fås:

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{y}} &= \ddot{y} \Rightarrow \\ \ddot{\tilde{y}} &= c_1 - c_2(\tilde{y} - b)\end{aligned}$$

Vælges vores offsetkonstant b nu passende fås et meget pænere udtryk for differentialligningen (6).

$$\begin{aligned}b &= \frac{-c_1}{c_2} \Rightarrow \\ \ddot{\tilde{y}} &= -c_2\tilde{y} \Rightarrow \\ \tilde{y}(t) &= A\cos(\sqrt{c_2}t + \delta)\end{aligned} \tag{9}$$

Ved tilbagesubstituering af den gamle y ind i (9) fås.

$$y(t) = \tilde{y}(t) - b = A\cos(\sqrt{c_2}t + \delta) + l_0 + \frac{gm}{k} \tag{10}$$

I ovenstående udtryk er δ en integrationskonstant. Hermed er bevægelsesligningen for y fundet. Nu skal vi lige have fundet ligningen for x, og så er vi færdige. Kigger vi tilbage på (4) fås følgende sammenhæng.

$$\begin{aligned}0 &= 4\ddot{x} - \ddot{y} \Leftrightarrow \\ \ddot{x} &= \frac{1}{4}\ddot{y} \Leftrightarrow \\ x(t) &= \frac{1}{4}y(t) + k1t + k_2\end{aligned} \tag{11}$$

Hvor k_1 og k_2 i (11) er integrationskonstanter og bestemmes numerisk ud fra givne startbetingelser - dette er dog ikke noget, jeg vil gøre her. Hvis man ønsker det, kan man indsætte $y(t)$ i (11).

Vi er nu færdige med analysen af den modificerede Atwoodmaskine, og som det kan ses giver indrykningen af bare én fjeder meget større problemer, end man lige skulle tro.