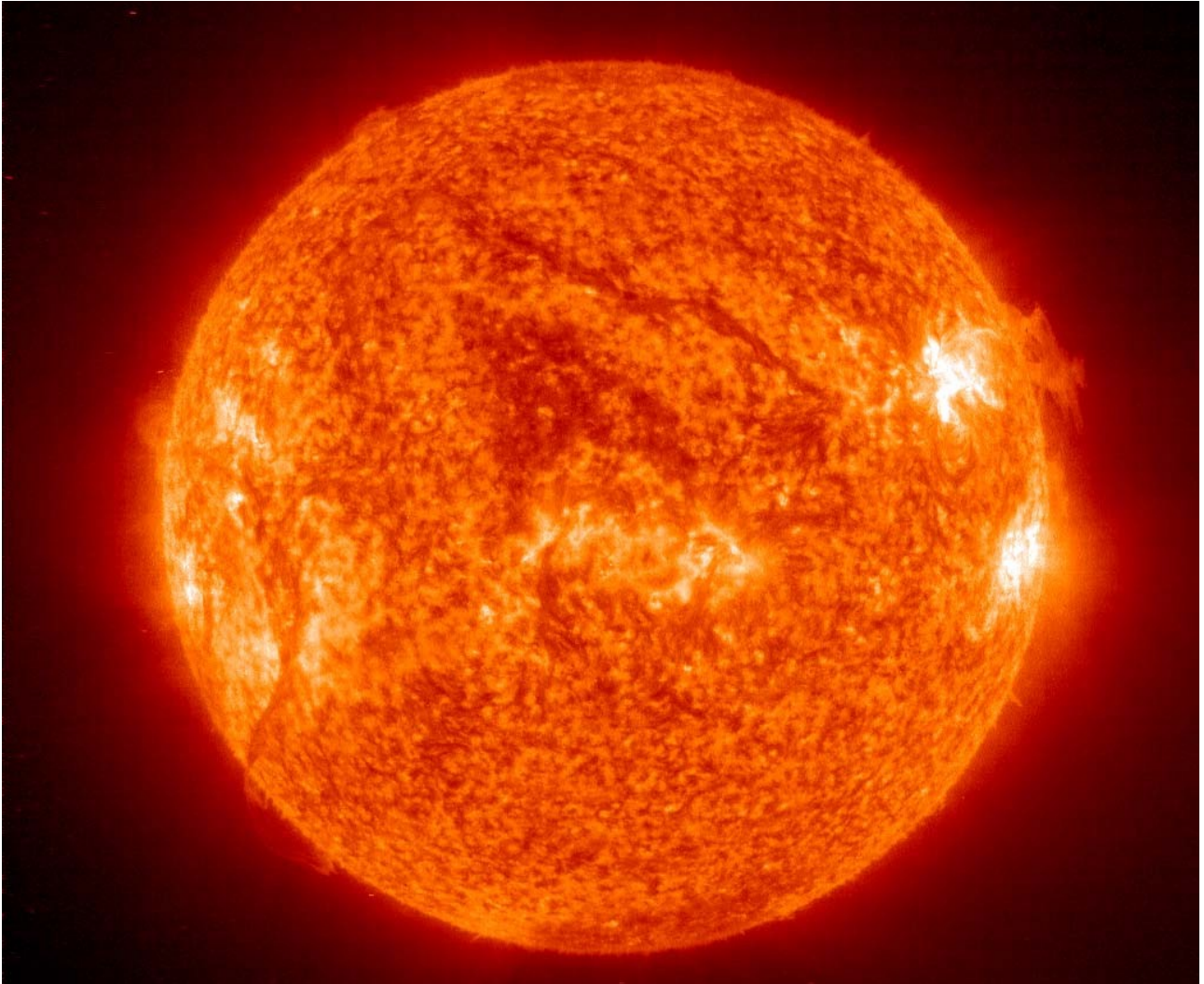


# Projekt opgave – Observationer af stjerneskelv

Af: Mathias Brønd Christensen (20073504), Kristian Jerslev (20072494), Kristian Mads Egeris Nielsen (20072868)



## Indhold

<a href="#">Formål.....</a>	<a href="#">3</a>
<a href="#">Teori.....</a>	<a href="#">3</a>
<a href="#">Hvorfor opstår der skælv?.....</a>	<a href="#">3</a>
<a href="#">FFT.....</a>	<a href="#">4</a>
<a href="#">Selve Forsøget.....</a>	<a href="#">4</a>
<a href="#">Resultater.....</a>	<a href="#">5</a>
<a href="#">Databehandling.....</a>	<a href="#">5</a>
<a href="#">Fouriertransformation.....</a>	<a href="#">6</a>
<a href="#">Dataarbejde.....</a>	<a href="#">7</a>
<a href="#">Vurdering.....</a>	<a href="#">9</a>
<a href="#">Fejl og usikkerheder.....</a>	<a href="#">12</a>
<a href="#">Konklusion.....</a>	<a href="#">12</a>

## Formål

Med rapporten ønskes at undersøge stjernerne Solen,  $\alpha$ -Centauri A og  $\alpha$ -Centauri B, ud fra lysspektre. Ud fra analysen skal stjernernes brintindhold, alder, radius og masse bestemmes.

## Teori

Teorien er hentet fra artiklen "Observationer af stjerneskælv" af Hans Kjeldsen og Tim Bedding.

Man kan sige en del om Jorden ud fra forholdene på overfladen. Mange af forholdene er ikke direkte forbundet til den indre del af Jorden, men for at forstå fænomener som Jordskælv og vulkanudbrud er man nødt til at vide hvad der ligger under Jordens overflade. Omvendt kan man også sige noget om forholdene under Jordens overflade ud fra observationer af førnævnte fænomener. Denne tankegang er da også nyttig for at studere astronomiske legemer. Det viser sig nemlig, at stjerner "skælver" og, at man ved at observere disse skælv kan sige noget om forholdene i himmellegemets indre.

### Hvorfor opstår der skælv?

Som sagt er skælvne et udtryk for forholdene på Solen. Hvis man betragter Solen som en kugle af gas, vil man forvente at der vil opstå svingninger svarende til lydbølger i Jordens atmosfære (blot med en meget anderledes hastighed). Disse svingninger kan permeere dybt ind i Solens indre. Således har faktorer som densiteten, temperaturen og brintindholdet en effekt på karakteren af svingningerne. Ved at observere disse bølger kan førnævnte forhold bestemmes. Mængden af brint og radius af stjernen kan desuden bestemmes når disse forhold kendes.

Strukturen af svingningerne beskrives ved hjælp af parametrene  $l$ ,  $m$  og  $n$ .  $n$  beskriver antallet af bølger ind i stjernen og  $l$  og  $m$  bestemmer karakteren af bevægelsen på overfladen, ligesom længde og breddegrader bestemmer position på Jorden.  $l$  beskriver antallet af ordner rundt på overfladen af stjernen og derved vil lave værdier af  $l$  beskrive bølger der permeerer dybt ind i Solens indre. Disse er således specielt interessante for dette forsøg.  $m$  (azimutalgraden) er ikke interessant for dette forsøg. De data man får fra observationen af stjernerne består af en baggrund som kommer fra bevægelsen af hele stjernen, samt enkeltstående svingninger, som kommer fra de svingninger, der opstår på Solens overflade. For at kunne analysere dataene er man interesseret i at sætte dem op i et koordinatsystem som brøkdelen af den totale lysstyrke fra stjernen som funktion af frekvensen for svingningen. Der skal således fouriertransformeres, og specifikt vælges algoritmen FFT (**F**ast **F**ourier **T**ransformation).

## FFT

Fouriertransformationen betragter en sum af harmoniske svingninger, og integrerer, groft sagt, lysstyrken op over en svingning for en given frekvens. Resultatet bliver et diagram med en top, hvor størrelsen af toppen afhænger af antallet og amplituden af svingningerne med en given frekvens og dens position på 1.-aksen afhænger af den frekvens den svinger med. Til matlab anvendes funktion "fft", som netop udfører fouriertransformationen for et sæt af harmoniske svingninger. FFT anvender den specifikke struktur af Fouriermatricen til at omskrive processen, således at man reducerer fouriermatricen til en matrice bestående af fouriermatricer af lavere grad. Dette reducerer kraftigt antallet af beregninger, specielt hvis man har mange datapunkter.

## Selve Forsøget

I praksis er det lidt mere kompliceret at bestemme svingningerne. Da der ikke er noget medium for lydbølgerne at bevæge sig mellem Solen og Jorden, kan man ikke måle på lydbølgerne direkte. Derimod kan der kigges på ændringer i absorptionsspektret for stjernen og så via dopplereffekten relatere dette til frekvensen af svingningen. Fra stjerner langt væk er det ret svært at optage gode data, da det lys vi modtager interfererer stort set i et punkt, hvorimod man uden problemer kan se forskel på de forskellige dele af lyset på Solen. Det kræver meget gode teleskoper at betragte stjerner længere væk. Lyset kan bearbejdes af specielle teleskoper der kan se det lys man er interesseret i.

Til bestemmelsen af massen og brintindholdet skal der bruges både den lille og den store opsplnitning. Til dette formål kigges der på den asymptotiske formel:

$$\delta v_{nl} = v_{nl} - v_{n-l+2} \approx (4l+6)D_0$$

Hvor  $l$  er den lille opsplnitning for en given  $n$ , og  $D_0$  er en parameter der er følsom overfor forholdene nær stjernens kerne. Her har man at gøre med værdier af  $l$  på 0 til 1, så man får ved at omarrangere for hhv.  $l=0$  og  $l=1$ :

$$l = 0: v_{n0} - v_{n-12} = \delta v_{02} \approx 6D_0$$

$$l = 1: v_{n1} - v_{n-13} = \delta v_{13} \approx 10D_0$$

Da  $D_0$  er den samme, betyder det altså at der er to forskellige små opsplittings. I praksis passer udtrykkene ikke helt, da den asymptotiske formel kun er anvendt på approksimeret form, men faktum er, at der vil være to forskellige små opsplittings, så dette tages der hensyn for i analysen af spektrummet. Der er speciel interesse i  $\delta v_{02}$  da denne anvendes til at bestemme massen samt brintindholdet (men i princippet kunne man lige så godt vælge  $D_{0m}$  og derved  $\delta v_{13}$ ).

Eksperimentelt har man bestemt en stjernes egenskaber ved følgende formler:

$$T = \frac{10 - 14,3X}{M^3}$$

Hvor T er stjernes alder i milliarder af år, X er brintindholdet og M er massen af stjernen målt i enheder af solens masse. Desuden anvendes følgende relation til bestemmelse af stjernes radius:

$$\delta v_0 = 135 \mu\text{Hz} \sqrt{\frac{M}{R^3}}$$
$$\Leftrightarrow R = \left( \left( \frac{135 \mu\text{Hz}}{\Delta v_0} \right)^2 M \right)^{\frac{1}{3}} = M^{\frac{1}{3}} \left( \frac{135 \mu\text{Hz}}{\Delta v_0} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Hvor R og M er hhv. radius og masse af stjernen målt i enheder af hhv. Solens radius og Solens masse og  $\delta v_0$  er den store opsplitting.

## Resultater

Som resultater anvendes de udleverede data fra hjemmesiden

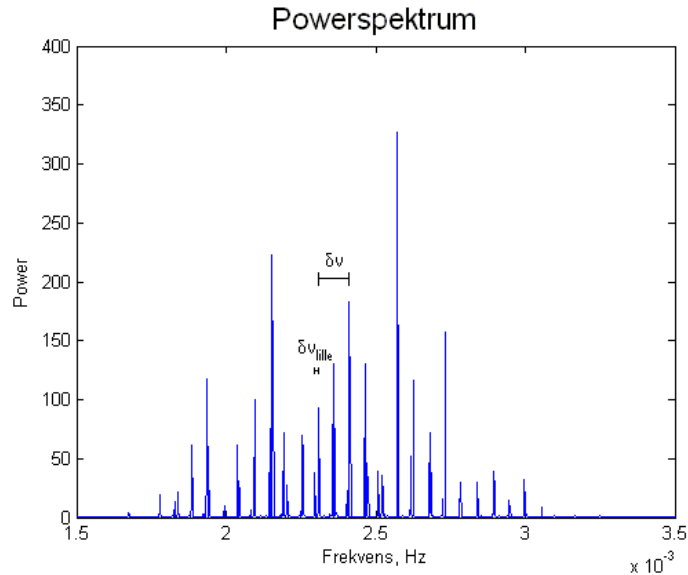
<http://www.phys.au.dk/~hans/fysik/data.htm>

## Databehandling

Dataene indlæses og behandles i matlab.

## Fouriertransformation

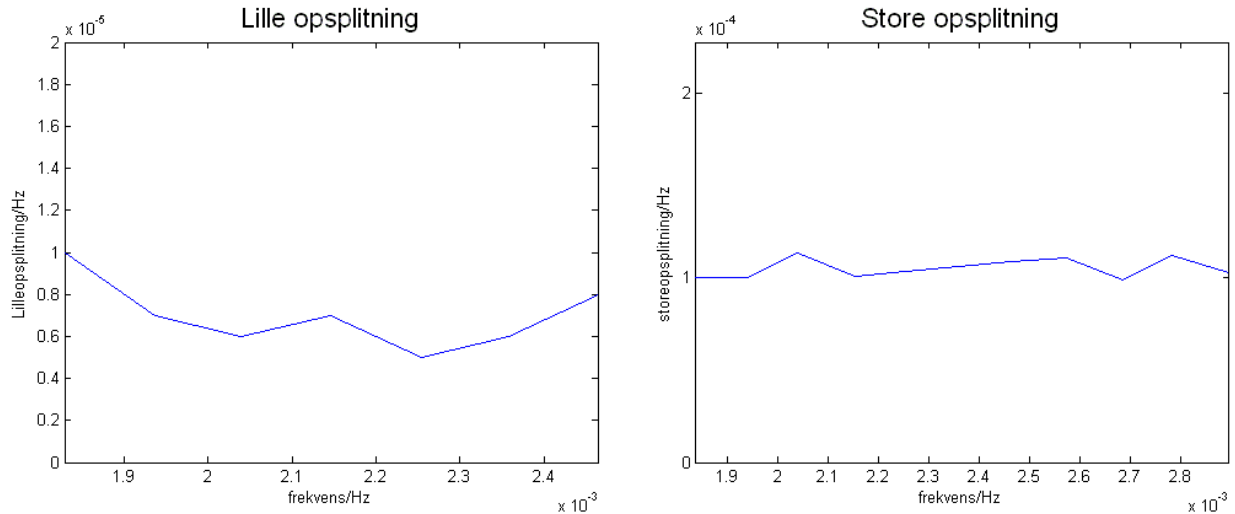
Først fouriertransformeres dataene. Dette gøres ved hjælp af matlabs indbyggede funktion "fft". Dette resulterer i et datasæt som plottes. Resultatet for Solen ses nedenfor. Lignende spektre optages for  $\alpha$ -Centauri A og B



Ovenfor ses powerspektret for Solen efter fouriertransformation. Plottet viser svingningsstyrken som funktion af frekvensen for svingningen. Den store og en af de små opsplitninger er også medtaget på plottet.

## Spektrumanalyse

De store og små opsplitninger ( $\delta\nu$ ) er bestemt ved analyse af powerspektret for hver af de tre stjerner. Eksempelvis vil et plot for  $\alpha$ -Centauri A over den store og den lille opsplitning som funktion af frekvensen se således ud:



Ovenfor ses den lille og den store opsplnitning som funktion af frekvensen for  $\alpha$ -Centauri A.

På grafen til venstre er det gennemsnittet af de to små opsplnitninger, der er plottet som funktion af frekvensen. Ud fra dette bemærkes det, at der ikke er den store forskel på de to opsplnitninger. Det ses, at de to grafer med opsplnitninger ligger tilnærmelsesvis på linje, hvilket betyder at vores aflæsning af dataene har været god.

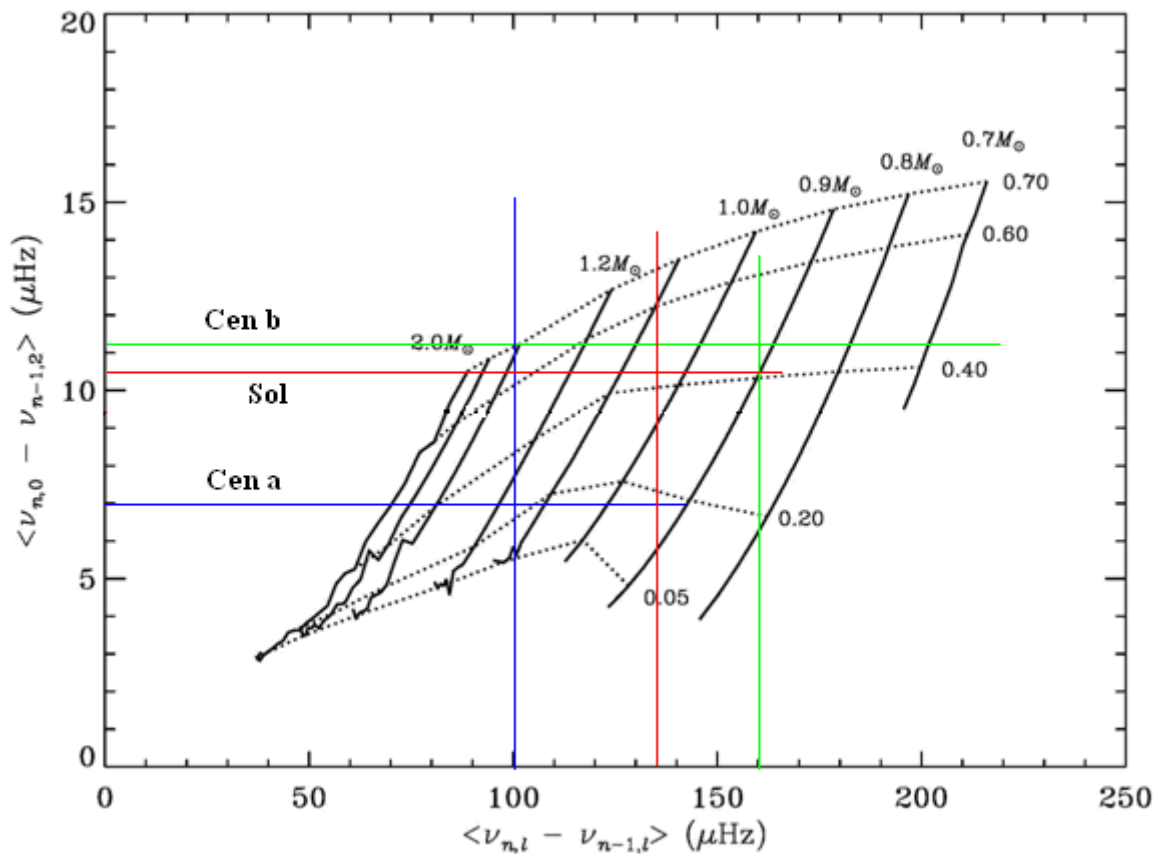
## Dataarbejde

Middelværdien for de store og små opsplnitninger bestemmes til:

Middelværdi af	Sol	$\alpha$ -Cen A	$\alpha$ -Cen B
$\mathcal{S}_0$	1.36E-04	1.05E-04	1.61E-04
$\mathcal{S}_{02}$	1.08E-05	7.00E-06	1.12E-05
$\mathcal{S}_{13}$	8.29E-06	1.11E-05	1.74E-05

Middelværdien af de to små opsplnitninger og den store opsplnitning for hver af de tre stjerner.

Ud fra den store opsplnitning kan stjernens masse og brintindhold bestemmes ved følgende graf, idet vi plotter to streger langs akserne, hvor førsteaksen er den store opsplnitning og andenaksen er den lille opsplnitning ( $\mathcal{S}_{02}$ ).



Her ses bestemmelsen af masse og brintindhold af stjernerne. De forskellige farver svarer til farverne i skemaet ovenover diagrammet. Diagrammet er hentet fra <http://www.phys.au.dk/~hans/fysik/CD-diagram.jpg>

Fra diagrammet fås følgende data:

Stjerne	Masse	Radius	Brint	Alder
Solen	1,04M	1,01R	42%	4,66Gyr
$\alpha$ -Cen A	1,17M	1,24R	24%	4,10Gyr
$\alpha$ -Cen B	0,92M	0,87R	45%	4,59Gyr

I skemaet ses massen, beregnet radius, brintindhold og beregnet alder for hver af de tre stjerner.

Alder og radius af stjernerne er bestemt ved anvendelse af formlerne fra teoriafsnittet:

Stjerneskælv  
30. maj, 2008

$$T = \frac{10 - 14,3X}{M^3}$$

$$R = M^{\frac{1}{3}} \left( \frac{135 \mu\text{Hz}}{\Delta v_0} \right)^{\frac{2}{3}}$$

For solen vil beregningerne se ud som følger:

$$T = \frac{10 - 14,3 \cdot 0,4}{(1,02)^3} = 4,66 \text{ Gyr}$$

$$R = 1,04^{\frac{1}{3}} \left( \frac{135 \mu\text{Hz}}{136 \mu\text{Hz}} \right)^{\frac{2}{3}} = 1,01$$

Tilsvarende beregninger laves for de to andre stjerner.

## Vurdering

Efterfølgende kan man da efterprøve disse målinger med nogle andre, hvis powerspektrum ikke nødvendigvis ser fuldstændig indentisk ud.

Benyttes følgende datasæt til at bestemme den store og den lille opsplitning, kan det ses om Solens powerspektre er entydige, på trods af at powerspektret for følgende ikke umiddelbart ligner den første fra Solen.

A [GOLF data: Solen: T=7 døgn, sampling: 80 sec](#) (datasæt 1)

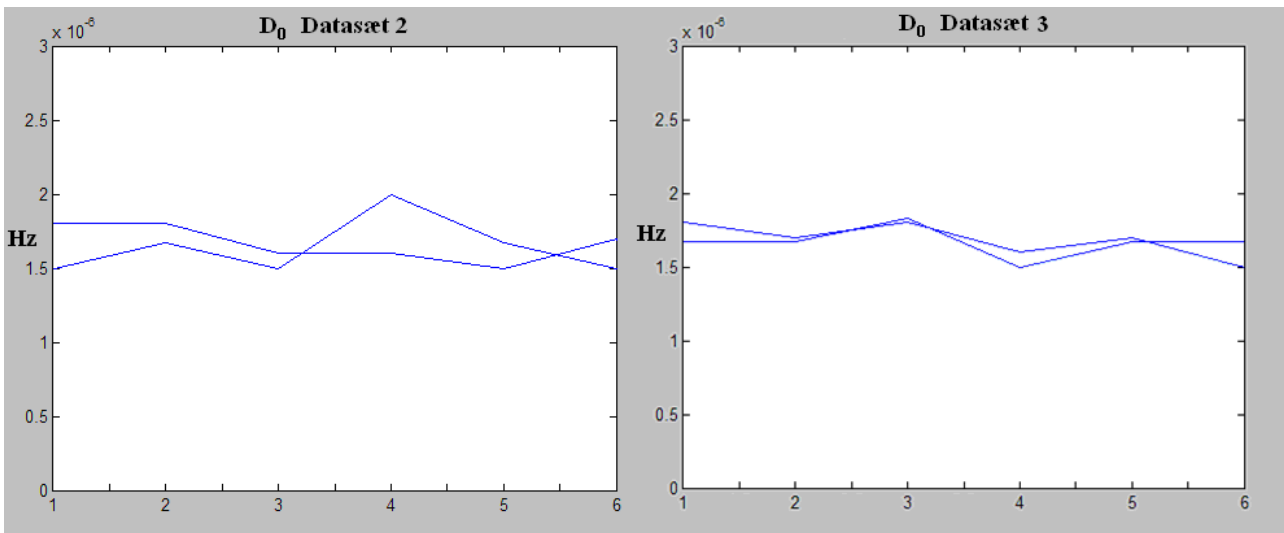
[GOLF data #1: T=30 dage, sampling: 80 sec.](#) (datasæt 2)

[GOLF data #2: T=30 dage, sampling: 80 sec.](#) (datasæt 3)

Datasæt	$\delta_0$	$\delta_{02}$	Solmasser	Brintindhold	Alder	Radius
1	1,36E-04	1,08E-05	1,04	42%	4,66 Gyr	1,01
2	1,36E-04	9,83E-06	1,03	39%	4,05 Gyr	1,00
3	1,35E-04	1,00E-05	1,02	40%	4,03 Gyr	1,00

I tabellen ses en oversigt over resultaterne for analyse af powerspektrum fra solen med tre forskellige datasæt.

Det ses at disse datasæt stemmer meget godt overens. Afvigelserne på den store og den lille opsplitning i tabellen ovenfor er meget små. Ud fra disse afvigelser, kan et skøn på afvigelsen af alder, radius, masse og brintindhold dog ikke angives, da disse størrelser er baseret på aflæsning af en graf. Følgende grafer angiver præcisionen af den lille opsplitning.



De to ovenstående plots består hver især af to datasæt som er den lille opsplitning for  $l = 1$  skaleret med  $1/6$  og den lille opsplitning for  $l = 0$  skaleret med  $1/10$ , dvs.  $D_0$ . Som det blev nævnt i teorien burde der ikke være eksakt overensstemmelse, men det passer dog alligevel rimeligt overens, hvilket indikerer at dataene er gode.

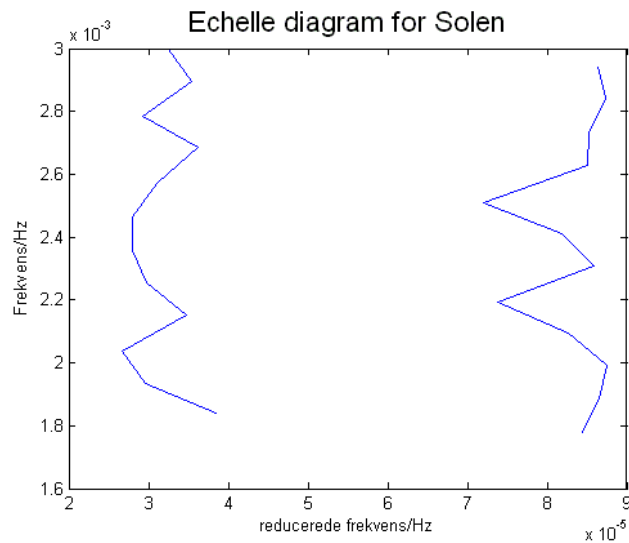
En oversigt over  $D_0$  værdierne ses i nedenstående skema. Det bemærkes, at der er en meget lille relativ afvigelse på værdierne bortset fra den første værdi (se fejlkilder for forklaring på denne afvigelse). Da den relative afvigelse på de to beregnede værdier for  $D_0$  fortæller omkring præcisionen på aflæsningerne af de to små opsplitninger, må disse siges at være udført med stor nøjagtighed og behøver derfor ikke nogen justering for at optimere resultatet.

	Sol <sub>1</sub>	Sol <sub>2</sub>	Sol <sub>3</sub>	$\alpha$ -Cen A	$\alpha$ -Cen B
--	------------------	------------------	------------------	-----------------	-----------------

$D_{02}$	1.38E-06	1.64E-06	1.67E-06	1.17E-06	1.87E-06
$D_{13}$	1.08E-06	1.67E-06	1.68E-06	1.11E-06	1.74E-06
Relativ afvigelse fra $D_{02}$	21.6%	-1.7%	-1.0%	4.5%	6.8%

Oversigt over beregnede værdier for  $D_0$  for de forskellige stjerner.

For at danne et overblik over, hvor præcis målingerne, og udregningerne med den store opsplitning er, er nedenfor lavet såkaldte Echelle-diagrammer for alle tre stjerner. Diagrammerne er lavet ved at plote den store opsplitning som funktion af modulus af samme. Dermed fremkommer to grafer for hver stjerne. Hvis disse to grafer med god tilnærmelse er lodrette siges den store opsplitning at være præcis nok til, at der ikke skal ændres på denne. Hvis det derimod viser sig, at graferne hælder til den ene side, så skal den store opsplitning justeres for at få graferne tilbage til at være lodrette. Dermed opnås et bedre resultat af den store opsplitning.



Echellediagram over den store opsplitning for Solen. Den store opsplitning er plottet som funktion af modulus til samme.

På echellediagrammet for Solen bemærkes det, at de to grafer er tilnærmelsesvis lodrette og dermed er det ikke nødvendigt at justere på værdien for den store opsplitning. Resultaterne bliver dermed optimale. Tilsvarende echellediagrammer fås for de to andre stjerner.

## Fejl og usikkerheder

Som mål for usikkerhederne på dataene anvendes et skøn og spredning på den store og den lille opsplætning. Som et skøn anvendes middelværdien af datapunkterne og standardafvigelsen udregnes med matlabs "std" funktion.

Stjerne	Skøn/Hz	Afvigelse/Hz	Afvigelse i %
Solen	1.3593E-4	3.22E-6	2.4%
$\alpha$ -CenA	1.0536E-4	5.37E-6	5.1%
$\alpha$ -CenB	1.612E-004	2.78E-5	17%

*I tabellen ses en oversigt over den store opsplætning for hver stjerne og deres standardafvigelse.*

Som man kan se er dataene fra Solen klart bedst.  $\alpha$ -Centauri A er rimelig god, men  $\alpha$ -Centauri B kunne godt have været bedre. Årsagen til de dårlige data kunne være at A overskygger B pga A's større lysstyrke. Der vil desuden være mere støj på  $\alpha$ -Centauri i forhold til Solen, da de er længere væk, og dataene er optaget fra et teleskop inden for jordens atmosfære.

I det tidligere afsnit blev det bemærket, at der var en afvigelse på den beregnede værdi for  $D_0$  for det første sæt data til Solen. Dette kan skyldes, at det første datasæt kun er taget over en tidsperiode på syv døgn, mens de resterende er taget over en tidsperiode på tredve døgn og dermed opnås en større præcision på datasættet.

## Konklusion

Ved analyse af svingningsobservationer på overfladen af stjerner er det blevet muligt at fortælle om de indre forhold af stjernen, der observeres. Vi har i forbindelse med dette projekt fundet frem til massen, radius, brintindhold i kernen og alderen på tre forskellige stjerner inklusiv vores egen lokale stjerne, som vi yderligere kender meget store detaljer omkring. Med disse resultater er formålet med øvelsen opfyldt og forsøget er dermed lykkedes.

Det bemærkes desuden, at alderen for  $\alpha$ -Centauri A og B inden for usikkerhederne i forsøget, er meget tæt på hinanden. Da vi ved, at  $\alpha$ -Centauri systemet er et triplestjernesystem bør alderen på stjernerne være tæt på hinanden. Ud fra usikkerhederne i dette forsøg er alderen på disse to stjerner også tæt nok på hinanden til, at vi kan konkludere, at dette stemmer godt overens med virkeligheden.