Den Specielle Relativitetsteori

Kristian Jerslev, 3y, Ringkjøbing Gymnasium

30-01-07

Indholdsfortegnelse

Indledning

Relativitetsteorien er en af de mest grundlæggende teorier i den moderne fysik. Jeg har i denne opgave valgt at beskæftige mig med den specielle relativitetsteori, hvis principper og antagelser er simple men har enorme konsekvenser for vores opfattelser af tidligere veldefinerede begreber så som tid, længde og masse, der alle bliver relative størrelser. At tiden ikke længere er en absolut størrelse medførte efterfølgende det, man i humaniora kalder for værdisammenbruddet[1]. Det var pludselig ikke længere nok at beskrive verden vha. sanser og iagttagelser; den tidsmæssige dimension manglede. Opfattelsen af verden, det harmoniske og overskuelige billede skabt af Galileitransformationen[2], blev pludselig ændret og uoverskueligt. Disse fysiske konsekvenser af relativitetsteorien kan på en måde sammenlignes med Nietzsches berømte sætning: *"Gud er død"*, hvor garanten for etik, moral og adfærd pludselig forsvinder. En af tilværelsens tilsyneladende konstanter forsvinder og efterlader et tomrum.

For fysikerne derimod havde relativitetsteorien en forløsende konsekvens. Pludselig var det muligt at beskrive fænomener, der var blevet observeret modstridende med Galileitransformationen ved at opstille matematiske modeller vha. Einsteins teorier. Tidligere havde det nemlig vist sig, at den klassiske mekaniks love var utilstrækkelige, når det drejede sig om bevægelser, der foregik med hastigheder i nærheden af lysets.

Det er på baggrund af disse konsekvenser, jeg finder dette emne meget interessant at beskæftige sig med, hvorfor jeg har valgt at skrive min større skriftlige opgave indenfor dette område.

Jeg vil i denne opgave starte med at udlede relativiteten på begreberne tid og længde. Herefter vil jeg udlede formlerne, der skal erstatte Galileitransformationen med Lorentztransformationen for inertialsystemer i translativ bevægelse. Derefter vil jeg udlede, hvorfor masse også er relativ. Til slut vil jeg behandle et forsøg, hvor jeg bestemmer lysets hastighed for derefter at regne nogle opgaver, hvor jeg benytter den specielle relativitetsteori. Opgaverne er selvkonstruerede, så der tages forbehold for fejl i de antagne værdier.

[1] Litteraturhåndbogen: s. 223
[2] Jf. vedlagte bilag, hvor Galileitransformationen er noteret.

En begivenhed

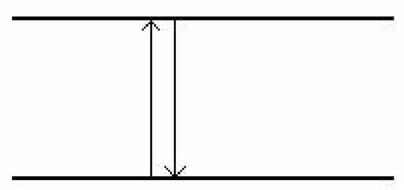
Som udgangspunkt vil jeg slå fast, hvad 'en begivenhed' er. En begivenhed er en hændelse, der finder sted på et givent sted og et givent tidspunkt i rummet. Begivenheder kan beskrives med fire koordinater: (x,y,z,t) samt en referenceramme S. Koordinaterne beskriver, hvor og hvornår begivenheden indtraf og referencerammen fortæller hvorfra målingerne af koordinaterne er udført.

I den specielle relativitetsteori beskæftiger vi os kun med referencerammer, der opfylder Newtons første lov om inerti. Dette betyder, at vores referenceramme ikke bliver påvirket af nogen kræfter udefra, hvorfor rammen enten er i jævn retlinjet bevægelse eller står stille – rammen bliver altså ikke accelereret. Det skal dog bemærkes, at objekter *indenfor* rammen godt kan blive accelererede, selvom rammen ikke accelereres.

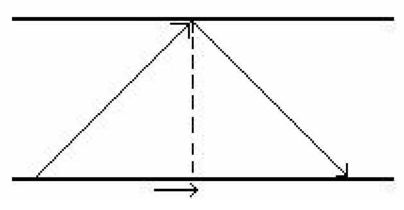
Relativitetsteori og Kinematik[3]

Tidsforlængelse

Vi forestiller os, at vi vil måle tiden med et Feynmann ur, der består af to parallelle spejle, hvor vi har en lysimpuls imellem. Tiden er så defineret som den tid, det tager for lyset at komme fra det ene spejl, op til det andet og tilbage igen. Afstanden



imellem spejlene kalder vi for Δy. Den afstand, lyset tilbagelægger, er altså givet ved: $2\Delta y = c \cdot \Delta t' \Leftrightarrow \Delta y = \frac{c\Delta t'}{2}$., hvor $\Delta t'$ er den tid lyset benytter på at tilbagelægge afstanden. Sætter vi nu spejlene i bevægelse, mens vi selv er i hvile og observerer uret komme forbi os, vil



opstillingen se anderledes ud.

Afstanden er stadigvæk Δy, men tiden, denne afstand er om at blive tilbagelagt, er blevet ændret. Vi kalder den hvilende observatørs tidsopfattelse for Δt. Observatøren har åbenbart en anden

[3] Inspireret af Fysik i Grundtræk, s.100-102. Illustrationerne er gengivet efter figurerne på samme sider i Fysik i Grundtræk.

tidsopfattelse, end systemet selv. Vha. Pythagoras kan vi udregne sammenhængen mellem de to systemers tidsopfattelse. Feynmann uret bevæger sig med den konstante hastighed *v*.

$$\left(c\frac{\Delta t}{2}\right)^2=\left(v\frac{\Delta t}{2}\right)^2+\left(\Delta y\right)^2 \Leftrightarrow \frac{c^2\Delta t^2}{4}=\frac{v^2\Delta t^2}{4}+\left(\Delta y\right)^2 \Leftrightarrow c^2\Delta t^2=v^2\Delta t^2+4\left(\Delta y\right)^2 \Leftrightarrow \Delta t^2=\frac{v^2}{c^2}\cdot\Delta t^2+\frac{4\left(\Delta y\right)^2}{c^2}$$

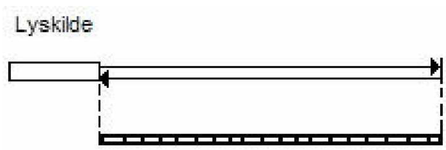
$$\Leftrightarrow 1=\frac{v^2}{c^2}+\frac{4\left(\Delta y\right)^2}{c^2}\cdot\Delta t^{-2} \Leftrightarrow 1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{4\left(\Delta y\right)^2}{c^2}\cdot\Delta t^{-2} \Leftrightarrow \Delta t^{-2}=\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(\frac{4\left(\Delta y\right)^2}{c^2}\right)} \Leftrightarrow \Delta t^2=\frac{\left(\frac{4\left(\Delta y\right)^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Delta t=\frac{\frac{2\Delta y}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Leftrightarrow \Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Leftrightarrow \Delta t=\gamma\cdot\Delta t'$$

Konstanten, vi vælger at kalde for γ bliver udledt senere i opgaven. Undervejs i denne udledning benyttede jeg, at $\Delta y=\frac{c\Delta t'}{2} \Leftrightarrow \Delta t'=\frac{2\Delta y}{c}$. En af konsekvenserne af den relative tidsopfattelse er det såkaldte tvillingeparadoks, der i alt sin enkelthed går ud på, at en af to tvillinger sendes ud på en rumrejse nær lysets hastighed igennem en længere periode for derefter at vende tilbage til jorden, hvor det her forventes, at den tilbageblevne tvilling er yngre end den rejsende. Paradokset er, at den tilbageblevne tvilling også forventer at have en yngre tvilling, der kommer tilbage efter rumrejsen. Detaljerede beregninger, jeg ikke vil gennemgå, viser dog, at det er tvillingen på jorden, der har ret. Når den rejsende tvilling bremser sin raket for at vende den om vil tiden på jorden, set fra raketten, løbe hurtigere. Dette er dog en konsekvens af den generelle relativitetsteori, da den specielle ikke beskæftiger sig med referencerammer under acceleration.

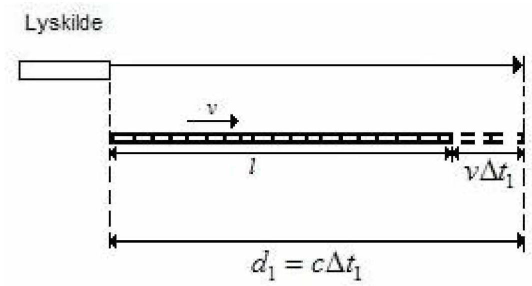
Længdeforkortelse

Det er ikke særlig svært at måle længden l' af et legeme, hvis det er i hvile i et givet referencesystem. Her benyttes bare en ganske almindelig tommestok og den målte længde kaldes for egenlængden. Som det ses på *figur 3* kan man bestemme længden vha. lys. Egenlængden er da givet ved $l'=0,5c\Delta t'$, hvor $\Delta t'$ er den tid, det tager for lyset at ramme spejlet og komme tilbage. Denne observation er lavet i systemet S', men kigger vi på samme



Figur 3: Egenlængden bestemt vha. lys, hvor observationen laves i samme referencesystem som legemet befinder sig i.

situation set fra S, der bevæger sig med hastigheden *v*, er det en helt anden sag. Lysglimtet må tilbagelægge strækningen $d_1 = c\Delta t_1$, da lyshastigheden også er c i forhold til S (dette udledes senere i opgaven). Samtidig må lyset jo tilbagelægge strækningen $d_1 = l + v\Delta t_1$, før det reflekteres. Disse to udtryk sættes lig hinanden:



Figur 4: Længden *l* af legemet i bevægelse med hastigheden *v* kan også bestemmes vha. et lyssignal.

$c\Delta t_1 = l + v\Delta t_1 \Leftrightarrow \Delta t_1\left(c - v\right) = l \Leftrightarrow \Delta t_1 = \dfrac{l}{c - v}$. Analogt finder vi udtrykket for tilbagevejen (d_2), der har følgende to udtryk for den tilbagelagte strækning: $d_2 = l - v\Delta t_2$ og $d_2 = c\Delta t_2$, som nu sættes lig hinanden:

$$l - v\Delta t_2 = c\Delta t_2 \Leftrightarrow \Delta t_2\left(c + v\right) = l \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{l}{c + v}$$

Den samlede tid fra signalet sendes af sted til det er tilbage må altså være summen af de to tidsudtryk:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Leftrightarrow \Delta t = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{l\left(c + v\right) + l\left(c - v\right)}{c^2 - v^2} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{2lc}{c^2 - v^2} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\frac{2l}{c}}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\frac{2l}{c}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Leftrightarrow \Delta t = \gamma^2 \cdot \frac{2l}{c} \Leftrightarrow l = \frac{c\Delta t}{2\gamma^2}$$

Da vi kender til tidsforkortelse kan vi indsætte denne på Δt s plads. Samtidig ved vi, at $l' = \dfrac{c\Delta t'}{2}$, hvorfor vi nu kan opskrive følgende:

$$l = \frac{c \cdot \gamma\Delta t'}{2\gamma^2} \Leftrightarrow l = \frac{c \cdot \Delta t'}{2} \cdot \gamma^{-1} \Leftrightarrow l = l' \cdot \gamma^{-1} \Leftrightarrow l' = \gamma l$$

Denne sammenhæng viser, at en længde, der er sat i bevægelse vil, målt fra S, forekomme kortere, end hvis den måles fra S'. Her skal det dog bemærkes, at S' følger med længden, mens S er i hvile i forhold til S'.

Lorentztransformationen[4]

I det følgende vil jeg udlede Lorentztransformationen, der ser således ud:

$$\begin{cases} x' = \gamma\left(x - vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} x = \gamma\left(x' - vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' - \dfrac{vx'}{c^2}\right) \end{cases}$$

Hvor γ er givet ved $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Vi vælger nu at udregne polynomiet $(x')^2+(y')^2+(z')^2-(ct')^2$ og følgende fås:

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=\left(\gamma\left(x-vt\right)\right)^2+y^2+z^2-c^2\left(\gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)\right)^2=\gamma^2\left(x-vt\right)^2+y^2+z^2-c^2\gamma^2\left(t-\frac{xv}{c^2}\right)^2=$$

$$\frac{x^2+v^2t^2-2xvt}{1-\frac{v^2}{c^2}}+y^2+z^2-\frac{c^2\left(t^2+\frac{x^2v^2}{c^4}-2\frac{xv}{c^2}t\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{x^2+v^2t^2-2xvt-c^2t^2-\frac{x^2v^2}{c^2}+2xvt}{1-\frac{v^2}{c^2}}+y^2+z^2=$$

$$\frac{x^2+v^2t^2-c^2t^2-\frac{x^2v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}+y^2+z^2=\frac{x^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+c^2\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)\cdot t^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}+y^2+z^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2$$

På en meget kortere og mere overskuelig måde, kan vi nu opskrive:

$$(x')^2+(y')^2+(z')^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2$$

Det siges nu, at polynomiet er invariant overfor Lorentztransformationen.

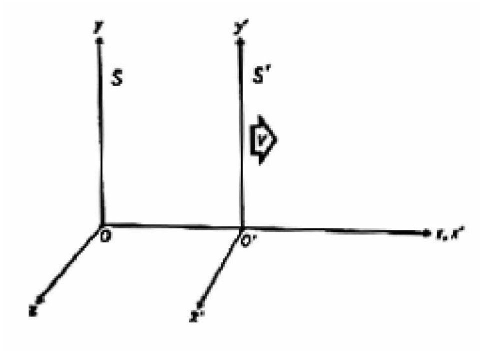
Vi lader nu til tiden 0 en lysbølge blive udsendt fra O i en eller anden retning i S. Til tiden *t* vil denne bølge passere punktet (x,y,z). Den tilbagelagte strækning er altså givet ved $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, og da vi kender til lysets fart samt tiden, strækningen tog, vil dette være lig med *ct*. Sagt på en anden måde, vil polynomiet, vi udregnede ovenfor, på højre side være lig med 0. Dette betyder, at venstre side også er nul – eller sagt på en anden måde: $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=ct'$, hvorfra vi kan se, at

[4] Inspireret af Lærebog i Fysik 2, s. 190ff.

lyset også udbredes med hastigheden c i S'. Ovenstående invarians bekræfter altså, at lysets vakuumfart c er en universalkonstant.

Lad os betragte en begivenhed P. Denne begivenhed betragtes fra to forskellige inertialsystemer, S og S', hvor S' fjerner sig fra S med hastigheden v.

Kigger vi på *figur 5* og tænkes os, at vi vælger tidsregningens begyndelse i S' således, at $t'=0$ på det tidspunkt, hvor O falder sammen med det forbipasserende punkt O' i S'. Det bemærkes, at dette er set fra inertialsystemet S'. Som det fremgår på *figur 5* kan det også ses, at vi lægger en x-akse gennem O og O' og denne er orienteret således, at O' bevæger sig langt aksen med den positive translationshastighed v. Linjestykket OO' er altså – med fortegn – til tidspunktet t bestemt ved:



Figur 5: To inertialsystemers indbyrdes bevægelser. For kilde se litteraturliste.

$OO' = vt$ (set fra S)

Lægger vi nu gennem O' og O en x'-akse, således at O i forhold til S' bevæger sig med en positiv translationshastighed. Da de to inertialsystemer er i indbyrdes samme situation overfor hinanden og de benyttede enheder er defineret på samme måde, må vi derfor kunne antage, at translationshastigheden af O set fra S' er det samme som translationshastigheden af O' set fra S. Altså:

$O'O = vt'$ (set fra S')

Begivenheder i det ene system kan altså blive betragtet fra det andet system. Holder vi os stadigvæk til begivenheder på abscisseakserne betyder dette, at der til begivenheden (x,t) i S også er en begivenheden, der kan betragtes i S'. Denne begivenhed må være (x',t'). Det afgørende her er, at der til tiden t set fra S er en begivenhed i punktet med abscissen x, og at denne begivenhed set fra S' foregår til tiden t' i punktet med abscissen x'. Til hver begivenhed (x,t) i det ene system svarer på tilsvarende måde til en begivenhed (x',t') i det andet system og omvendt. Der må altså gælde:

$$\begin{cases} x' = f'(x,t) \\ t' = g'(x,t) \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} x = f(x',t') \\ t = g(x',t') \end{cases}$$

Disse funktioner skal vi nu prøve at finde. Da de to systemer ved begivenheder på abscisseakserne er ens, må funktionerne også være det. Altså:

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ t' = g(x,t) \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} x = f(x',t') \\ t = g(x',t') \end{cases}$$

Vi betragter nu et punkt *P'* set fra S. Dette punkt er i hvile i systemet S'. Punktet *P'* bevæger sig i systemet S langs med abscisseaksen med den positive hastighed *v*, hvor vi nu har til et givent tidspunkt *t*:

(0.1) $$x = \left(OP'\right)_t \Leftrightarrow x = \left(OO'\right)_t + \left(O'P'\right)_t \Leftrightarrow x = vt + \left(O'P'\right)_t$$

$\left(O'P'\right)_t \neq x'$ da vi betragter systemet fra S. Derimod er $\left(O'P'\right)_t = x'$ hvis vi betragter systemet fra S'. Vi ved altså nu, at $\left(O'P'\right)_t$ må være længdeforkortet. Af formlen for længdeforkortelse ved vi følgende:

$l' = \gamma l$

Indsætter vi værdierne i formlen for længdeforkortelse finder vi følgende:

$$|x'| = \gamma \cdot |\left(O'P'\right)_t| \Leftrightarrow |\left(O'P'\right)_t| = \frac{|x'|}{\gamma}$$

De numeriske tegn er benyttet, da vi arbejder med længder. Vi ovenstående udtryk i (0.1):

(0.2) $$x = vt + \left(O'P'\right)_t \Leftrightarrow x = vt - \frac{x'}{\gamma} \Leftrightarrow x - vt = -\frac{x'}{\gamma} \Leftrightarrow \boxed{x' = -\gamma\left(x - vt\right)}$$

Vi har altså nu fundet funktionen $x' = f(x,t)$ fra tidligere.

Vender vi nu processen med punktet *P'* om og betragter punktet *P*, der er i hvile i S, mens det i S' bevæger sig med hastigheden *v*. Der må altså være en hændelse (x',t') til et vilkårligt tidspunkt *t'*. Til det vilkårlige tidspunkt må der altså gælde:

(0.3) $$x' = \left(O'P\right)_{t'} \Leftrightarrow x' = \left(O'O\right)_{t'} + \left(OP\right)_{t'} \Leftrightarrow x' = vt' + \left(OP\right)_{t'}$$

Det bemærkes her – ligesom ved (0.1), at $\left(OP\right)_{t'} \neq x$, da vi ser systemet fra S'. Betragter vi derimod systemet fra S vil der gælde, at $\left(OP\right)_{t'} = x$ - der er altså tale om en længdeforkortning, hvorfor vi nu kan opskrive følgende:

$l' = \gamma l \Leftrightarrow |x| = \gamma \cdot |\left(OP\right)_{t'}| \Leftrightarrow |\left(OP\right)_{t'}| = \frac{|x|}{\gamma}$, der nu indsættes i (0.3):

(0.4) $$x' = vt' + \left(OP\right)_{t'} \Leftrightarrow x' = vt' - \frac{x}{\gamma} \Leftrightarrow x' - vt' = -\frac{x}{\gamma} \Leftrightarrow \boxed{x = -\gamma\left(x' - vt'\right)}$$

Nu er funktionen $f(x',t')$ bestemt. Vi sammenføjer nu funktionerne (0.2) og (0.4):

$$\begin{cases} x' = -\gamma\left(x - vt\right) \\ x = -\gamma\left(x' - vt'\right) \end{cases}$$

Ved elimination af *x* i de to funktioner ovenfor vil vi finde et udtryk for *t*:
(0.5)

$$x' = -\gamma\left(\left(-\gamma\left(x' - vt'\right)\right) - vt\right) \Leftrightarrow x' = -\gamma\left(-\gamma x' + \gamma vt' - vt\right) \Leftrightarrow x' = \gamma^2 x' - \gamma^2 vt' + \gamma vt \Leftrightarrow$$

$$x' = \gamma\left(\gamma x' - \gamma vt'\right)' + \gamma vt \Leftrightarrow x' = \gamma^2 x' - \gamma 2vt' + \gamma vt \Leftrightarrow x' - \gamma^2 x' + \gamma^2 vt' = \gamma vt \Leftrightarrow$$

$$\frac{x' - \gamma^2 x' + \gamma^2 vt'}{1} = \gamma vt \Leftrightarrow \frac{\gamma^2 vt'}{1} + \frac{-x'\left(\gamma^2 - 1\right)}{1} = \gamma vt \Leftrightarrow t = \frac{\gamma^2 vt'}{\gamma v} + \frac{-x'\left(\gamma^2 - 1\right)}{\gamma v} \Leftrightarrow \boxed{t = \gamma t' - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma v} \cdot x'}$$

Hermed er funktionen $g(x',t')$ fundet. Tilsvarende finder vi $g(x,t)$ ved at eliminere *x'*:

$$x = -\gamma\left(\left(-\gamma\left(x - vt\right)\right) - vt'\right) \Leftrightarrow x = -\gamma\left(-\gamma x + \gamma vt - vt'\right) \Leftrightarrow x = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt' \Leftrightarrow$$

(0.6)

$$t' v\gamma = x - \gamma^2 x + \gamma^2 vt \Leftrightarrow t' = \frac{\gamma^2 vt}{v\gamma} + \frac{-x\left(\gamma^2 - 1\right)}{v\gamma} \Leftrightarrow \boxed{t' = \gamma t' - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma v} \cdot x'}$$

Vi har nu vist de forrige fire funktioner. De opsummeres her:

$$\begin{cases} x = f(x',t') = -\gamma\left(x' - vt'\right) \\ t = g(x',t') = \gamma t' - \dfrac{\gamma^2 - 1}{v\gamma} \cdot x' \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} x' = f(x,t) = -\gamma\left(x - vt\right) \\ t' = g(x,t) = \gamma t - \dfrac{\gamma^2 - 1}{v\gamma} \cdot x \end{cases}$$

Da vi ved, at lysets udbredelsesfart er ens i alle retninger og alle inertialsystemer kan vi nu hurtigt finde Lorentztransformationen. Vi lader $t = 0$, hvor de to koordinatsystemers begyndelsespunkter O og O' falder sammen. Der udsendes nu et lyssignal langt den positive x-akse i S; det vil sige langt den negative x'-akse i S'. Til tiden $t = 0$ målt i S passerer lyset et punkt, hvis abscisse i S er $x = ct$ og fra S' passerer lyset samme punkt til tiden *t'*, hvorfor punktets abscisse her er $x' = -ct'$. Vi bemærker, at der står et minus-tegn. Dette skyldes, at de to koordinatsystemer er vendt modsat hinanden. Indsætter vi de to udtryk for abscisserne i (0.2) og (0.4) får vi følgende udtryk:

$$x = -\gamma\left(x' - vt'\right) \Leftrightarrow ct = -\gamma\left(-ct' - vt'\right) \Leftrightarrow ct = \gamma ct' + \gamma vt' \Leftrightarrow \frac{ct}{ct'} = \gamma + \frac{\gamma t}{c} \Leftrightarrow \frac{t}{t'} = \gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

$$x' = -\gamma\left(x - vt\right) \Leftrightarrow -ct' = -\gamma\left(ct - vt\right) \Leftrightarrow -ct' = -\gamma ct + \gamma vt \Leftrightarrow \frac{-ct'}{-ct} = \gamma + \frac{\gamma vt}{-ct} \Leftrightarrow \frac{t'}{t} = \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Disse to udtryk multipliceres nu for at finde et udtryk for γ:

$$\frac{t'}{t} \cdot \frac{t}{t'} = \left(\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right)\right) \cdot \left(\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)\right) \Leftrightarrow \frac{t't}{tt'} = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Leftrightarrow 1 = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Her forkastes den negative løsning i nævneren, da vi ved, at $\gamma > 0$. Udtrykket for γ indsættes nu i udtrykkene (0.2), (0.4), (0.5) og (0.6) for at finde den færdige Lorentztransformation:

$$x' = -\gamma\left(x - vt\right) \Leftrightarrow x' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left(x - vt\right) \Leftrightarrow x' = -\frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = -\gamma\left(x' - vt'\right) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left(x' - vt'\right) \Leftrightarrow x = -\frac{x' - vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \gamma t' - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma v}\cdot x' \Leftrightarrow t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 - 1\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\cdot v}\cdot x' \Leftrightarrow t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x'\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 - x'}{\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x'\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) - x'}{\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \Leftrightarrow t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x' - \frac{x'v^2}{c^2} - x'}{\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \Leftrightarrow t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\frac{x'v^2}{c^2 v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

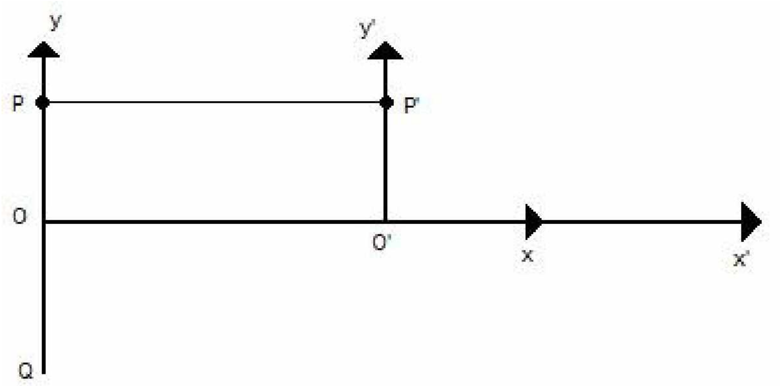
På tilsvarende måde vises dette for t':

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma v}\cdot x \Leftrightarrow t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 - 1\right)}{\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}\cdot x \Leftrightarrow t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 - x}{\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \Leftrightarrow$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) - x}{\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \Leftrightarrow t' = \frac{t - \frac{v^2 x}{c^2 v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Hidtil har vi kun beskæftiget os med begivenheder, der befandt sig på abscisseakserne i de to inertialsystemer. Vi vil nu undersøge Lorentztransformationerne for vilkårlige begivenheder i trevinklede koordinatsystemer.

Vi betragter nu *figur 6*, hvor vi har to inertialsystemer med deres ordinatakser. OP og OQ er lige lange, hvorfor Q nu er spejlbilledet af P i x-aksen. Ser vi på situationen set fra S' bliver P og Q parallelforskudt langs med x'-aksen, såfremt systemerne er i bevægelse. Dette medfører, at en retlinjet bevægelse i S fra Q til P gennem O også er retlinjet set fra S'. O' og P' er altså de hvilende punkter i S', og disse punkter falder til tiden $t=0$ sammen med punkterne O og P. Kigger vi på dette system fra S er OO'P'P altså et rektangel, da vinklen ved O er ret. Linjestykkerne OO' og PP' er fra S lige lange – begge lig med vt. Fra S' er disse to linjestykker også lige lange og er begge lig med $|-vt'|$. Iagttagere i begge systemer vil altså være enige om, at ordinatakserne står vinkelret på deres abscisseakser. Da vi ved, at OPP'O' til enhver tid *t'* er et rektangel i S' må dette medføre, at $l'(OP)=l'(O'P')$, hvor *l'* betyder, at længden er målt i S'. Vi indfører nu α, der er følgende sammenhæng:



Figur 6: Abscisse- og ordinatakser på 2 inertialsystemer.

$$\frac{l(OP)}{l'(OP)}=\frac{l(OP)}{l'(O'P')}=\alpha$$

Da O og P er i hvile i S, og O' og P' er i hvile i S' afhænger disse længder på ingen måde af tiden. α er altså uafhængig af tiden, hvorfor vi i sidste ende ved, at $\frac{l(OP)}{l'(O'P')}$ ikke afhænger af de tidspunkter, hvor vi har lavet længdemålingerne. De to inertialsystemer er i samme forhold overfor hinanden, hvorfor $l'(O'P')$ og $l(OP)$ også har forholdet α:

$\alpha=\frac{l'(O'P')}{l(OP)}$ eller sagt på en anden måde: $\alpha=\frac{1}{\alpha}$

Den eneste værdi for α, der opfylder denne betingelse må være $\alpha^2=1 \Leftrightarrow \alpha=\pm 1 \Rightarrow \alpha=1$

Den negative løsning forkastes, da vi ikke kan have et negativt forhold imellem længder. Vi ved altså nu, at forholdet imellem længderne er 1, hvorfor længderne må være de samme. Sagt på en anden måde, ved vi nu, at begivenhedens ordinater er ens set fra S og S'. Analogt vises dette for en z- og z'-akse.

Hastighedsaddition[5]

Vi orienterer de to inertialsystemers abscisseakser til samme side og vil nu betragte bevægelsen af et punkt P langs denne abscisseakse. Til tiden t passeres et punkt i S med abscissen x og til tiden $t+\Delta t$ passeres punktet med abscissen $x+\Delta x$. Tilsvarende er de samme passager set fra S' til tiden $t'+\Delta t'$ $x'+\Delta x'$. Indsætter vi i Lorentztransformationen får vi:

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right)$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$$

Og ved division mellem disse (hastighed er jo strækning pr. tid) får vi følgende:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)} \Leftrightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\left(\Delta x - v\Delta t\right)}{\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)} \Leftrightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta t\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - v\right)}{\Delta t\left(1 - \frac{v\Delta x}{c^2\Delta t}\right)} \Leftrightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Vi indfører nu følgende: $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}\left(\text{hastigheden i S}\right)$ og $u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}\left(\text{hastigheden i S'}\right)$, hvorfor vi nu kan omskrive ovenstående:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Da vores inertialsystemer er vendt i samme retning vil hastighederne set fra S være med omvendt fortegn. Altså:

$$u = \frac{u' - (-v)}{1 - \frac{u'(-v)}{c^2}} \Leftrightarrow u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$$

Hermed er det også vist, at hastigheder for en vilkårlig observatør ikke vil kunne overstige lysets hastighed, selvom det umiddelbart virker sådan. Indsætter vi hastigheden c i den ene af formlerne vil vi se, at det for observatøren også vil se ud som om, bevægelsen foregår med lysets hastighed – altså er antagelsen om, at lysets hastighed er den størst mulige stadigvæk overholdt. Det bemærkes, at er en af hastighederne større end c, vil nævneren blive negativ for værdier af v, der er større end nul og mindre end c. Dette vil betyde, at legemet set fra det ene system vil bevæge sig mod venstre,

[5] Inspireret af Lærebog i Fysik 2, s. 199ff

selvom det set fra det andet ville bevæge sig hurtigere mod højre end samme system gør det. Dette er jo absurd og bekræfter i alle fald, at lysets hastighed er den højeste hastighed et legeme, som er i forhold til et inertialsystem, kan bevæge sig.

For y- og y'-akserne vil vi også indføre følgende: $\Delta y' = \Delta y$, som kommer direkte af Lorentztransformationen. Yderligere ved vi om tiden i y- og y'-aksernes retninger: $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$ og analogt $\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$, hvorfor vi nu kan udlede formlerne, der viser hastighedsadditionen i y- og y'-aksernes retninger:

$$u'_{y'} = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} \Leftrightarrow u'_{y'} = \frac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)} \Leftrightarrow u_{y'}' = \frac{\Delta t \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\Delta t\gamma\left(1 - \frac{v\Delta x}{c^2 \Delta t}\right)} \Leftrightarrow u_{y'}' = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

Undervejs benyttede vi sammenhængen $u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$. Tilsvarende vises det for hastigheder i S:

$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \Leftrightarrow u_y = \frac{\Delta y'}{\gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)} \Leftrightarrow u_y = \frac{\Delta t' \cdot \frac{\Delta y'}{\Delta t'}}{\Delta t'\gamma\left(1 + \frac{v\Delta x'}{c^2 \Delta t'}\right)} \Leftrightarrow u_y = \frac{u_{y'}'}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_{x'}}{c^2}\right)}$$

På samme måde viser jeg nu formlerne for hastighedskomposanten i z- og z'-aksernes retninger. Det benyttes, at $\Delta z = \Delta z'$, som kommer direkte af Lorentztransformationen. Yderligere benyttes det igen, at $\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$ og $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$:

$$u'_{z'} = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} \Leftrightarrow u'_{z'} = \frac{\Delta z}{\gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)} \Leftrightarrow u'_{z'} = \frac{\Delta t \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t}}{\gamma\Delta t\left(1 - \frac{v\Delta x}{c^2 \Delta t}\right)} \Leftrightarrow u'_{z'} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$ og tilsvarende

$$u_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} \Leftrightarrow u_z = \frac{\Delta z'}{\gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)} \Leftrightarrow u_z = \frac{\Delta t' \cdot \frac{\Delta z'}{\Delta t'}}{\gamma\Delta t'\left(1 + \frac{v\Delta x'}{c^2 \Delta t'}\right)} \Leftrightarrow u_z = \frac{u'_{z'}}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_{x'}}{c^2}\right)}$$

Relativitetsteori og dynamik

Massen af partikler i bevægelse[6]

Vi vil nu kigge på et eksempel, hvor vi lader to partikler støde sammen i et uelastisk stød. Det vil sige, at de to partikler kolliderer og bliver til én partikel. Vores antagelse er, at massen af en partikel afhænger af partiklens hastighed, hvorfor vi kan opskrive følgende $m = m_0 \cdot f(v)$, hvor m_0 angiver hvilemassen. Er det ikke tilfældet, at massen afhænger af hastigheden vil $f(v)$ være lig med en konstant. Vi kigger på sammenstødet fra to systemer; ét i bevægelse med hastigheden *v*, S', og et, der er i hvile, S. Den samlede masse og impuls må være bevaret set fra begge systemer. Kigger vi på sammenstødet fra systemet i bevægelse vil de to partikler have hastighederne *v* og –*v* og vil efter stødet altså ligge stille.

Massebevarelse: $1) m_0 \cdot f(v) + m_0 \cdot f(v) = M_0 \Leftrightarrow 2m_0 \cdot f(v) = M_0$

Impulsbevarelse: $2) m_0 \cdot f(v) \cdot v + m_0 \cdot f(v) \cdot (-v) = M_0 \cdot 0 = 0$

Kigger vi på sammenstødet fra det hvilende system vil partiklen med hastigheden *v* – ifølge hastighedsaddition – have hastigheden *v* i S':

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}} \Leftrightarrow u = \frac{v+v}{1+\frac{v\cdot v}{c^2}} \Leftrightarrow u = \frac{2v}{1+\left(\frac{v}{c}\right)^2} = f(u)$$

Dette er tilfældet, da S' jo netop bevæger sig med hastigheden *v* i forhold til S. Partiklen med hastigheden –*v* vil, set fra S, ligge stille i S', da S' jo bevæger sig med hastigheden *v*. Dette kommer også som konsekvens af addition af hastigheder:

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}} \Leftrightarrow u = \frac{-v+v}{1+\frac{v\cdot(-v)}{c^2}} \Leftrightarrow u = \frac{0}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \Leftrightarrow u = 0$$

Efter stødet vil den nye partikel have farten *v* i forhold til S, da det ene partikel før stødet havde farten 0 og det andet *v*. Massen og impulsen er stadigvæk bevaret, hvorfor vi nu kan opskrive følgende:

Massebevarelse: $3) m_0 \cdot f(u) + m_0 = M_0 \cdot f(v)$

Impulsbevarelse: $4) m_0 \cdot f(u) \cdot u + m_0 \cdot 0 = M_0 \cdot f(v) \cdot v \Leftrightarrow m_0 \cdot f(u) \cdot u = M_0 \cdot f(v) \cdot v$

Indsætter vi nu den samlede hvilemasse fra formel 1) i 3) og 4) fås følgende:

[6] Inspireret af http://ga.randers-hf-vuc.dk/matlex/relativi.html#massefunktion

$$m_0 \cdot f(u) + m_0 = M_0 \cdot f(v) \Leftrightarrow m_0 \cdot f(u) + m_0 = 2 \cdot m_0 \cdot f(v) \cdot f(v) \Leftrightarrow m_0\left(f(u)+1\right) = 2m_0 \cdot f(v)^2 \Leftrightarrow$$
$$f(u) = 2 \cdot f(v)^2 - 1$$

og

$$m_0 \cdot f(u) \cdot u = M_0 \cdot f(v) \cdot v \Leftrightarrow m_0 \cdot f(u) \cdot u = 2m_0 \cdot f(v) \cdot f(v) \cdot v \Leftrightarrow f(u) = \frac{2 \cdot f(v)^2 \cdot v}{u}$$

Disse to udtryk sættes nu lig hinanden:

$$f(u) = f(u) \Leftrightarrow 2 \cdot f(v)^2 - 1 = \frac{2 \cdot f(v)^2 \cdot v}{u} \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{f(v)^2} = \frac{2v}{u} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(v)^2} = -2 + \frac{2v}{u} \Leftrightarrow \frac{1}{f(v)^2} = 2 - \frac{2v}{u}$$

I dette udtryk indsætter vi nu udtrykket for *u*, der blev udregnet tidligere vha. hastighedsaddition:

$$\frac{1}{f(v)^2} = 2 - \frac{2v}{u} \Leftrightarrow \frac{1}{f(v)^2} = 2 - \frac{2v}{\left(\frac{2v}{1+\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{f(v)^2} = 2 - \frac{2v \cdot \left(1+\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}{2v} \Leftrightarrow \frac{1}{f(v)^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Leftrightarrow$$

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

Indsætter vi nu $f(v)$ i udtrykket for vores første antagelse får vi følgende sammenhæng:

$$m = m_0 \cdot \gamma$$

Hermed kan det ses, at massen af partikler i bevægelser afhænger af deres hastighed. Vi ser desuden, at bevæger en partikel sig med en hastighed, der er tæt på *c* vil massen blive meget større. Bliver hastigheden af partiklen over *c*, vil vi få en kompleks nævner i brøken for γ, hvormed massen af partiklen vil blive uendelig stor. Sagt på en anden måde: En partikel, der har en hvilemasse forskellig fra 0 vil skulle tilføres en uendelig mængde energi for at blive accelereret op til lysets hastighed.

Eksperimentel bestemmelse af lysets hastighed[7]

Da vi nu har bestemt, at den øvre hastighedsgrænse i et inertialsystem er lysets hastighed *c*, kunne det jo være interessant at finde en talværdi for denne hastighed. Dette har jeg prøvet på at finde vha. en udgave af Michelsons forsøg fra 1878. Forsøgsvejledningen er vedlagt på bilag. Der er dog en

[7] Pihl og Storm: Fysiske Øvelser 2A, 3. udgave 1973, side 41.

ændring i forhold til vejledningen. Jeg benyttede en Helium-Neon-laser i stedet for en Reuterlampe og jeg benyttede mig af en tonegenerator og højtaler til at bestemme frekvensen af det roterende spejl. Ved at ramme den samme frekvens, som spejlet har, med tonegeneratoren kan jeg i højtaleren høre tonerne strakt meget langt ud. Hermed kan frekvensen af det roterende spejl bestemmes med en præcision ned til 0,5 Hz. En uddybende forklaring på denne usikkerhed kommer senere i dette afsnit.

Den benyttede forsøgsopstilling kan ses på bilaget med forsøgsvejledningen, og jeg vil i det følgende henvise til illustrationerne på samme bilag.

Lyset udsendes fra laseren og når hen til det roterende spejl. Her bliver det sendt længden 0,5*L* hen til et andet spejl, der så sender det lige tilbage i det roterende spejl. Den samlede vejlængde lyset tilbagelægger fra det roterende spejl og tilbage igen bliver da $2 \cdot 0,5L = L$, og tiden det tager at tilbagelægge denne strækning er så $t = \frac{L}{c}$. Vi vælger nu at kalde vinkelhastigheden af spejlet for ω, hvorfor spejlet altså vil have drejet vinklen $\omega t = \omega \frac{L}{c}$ før lyset kommet tilbage til spejlet (jf. illustration 13.7b på bilaget). Som det også fremgår af denne figur er lysstrålen i forhold til strålen, der kommer fra laseren, er drejet vinklen $2\omega t$. Returpletten, konvergenspunktet, bliver derfor også flyttet denne vinkel, og da vort halvgennemsigtige spejl kun drejer returstrålen halvfems grader vil konvergenspunktet flyttes vinklen $2\omega t$ på linealen, vi måler på. 2-tallet skyldes, at vinklen er ændret dobbelt så meget, da der er tale om en ændring af både indfalds- og udfaldsvinkel. Strækningen lyspletten flyttes under rotationen kalder jeg for *s*, hvorfra vi nu kan opskrive:

$s = 2r\omega t \Leftrightarrow s = 2r\omega \frac{L}{c}$, hvor *r* er afstanden fra linealen og ind til det roterende spejl. Skrives der lidt om på denne formel fås følgende udtryk for lysets hastighed:

$$s = 2r\omega \frac{L}{c} \Leftrightarrow c = \frac{2r\omega L}{s}$$

Vinkelhastigheden er givet ved følgende formel, hvori frekvensen (ν) er målt eksperimentelt:

$$\omega = 2\pi\nu$$

Indsætter vi nu de målte værdier ved første måling fås følgende:

$$\omega = 2\pi\nu \Leftrightarrow \omega = 2\pi \cdot 553{,}5Hz \Leftrightarrow \omega = 3477{,}74s^{-1}$$

$$c = \frac{2\omega rL}{s} \Leftrightarrow c = \frac{2 \cdot 3477{,}74s^{-1} \cdot 5{,}075m \cdot 30{,}048m}{0{,}34cm} \Leftrightarrow c = 311960917{,}8\,{}^{m}\!/_{s}$$

Den relative afvigelse fra lysets hastighed $c_{teo} = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}\,{}^{m}\!/_{s}$ er altså:

$$\frac{c_{beregnet} - c_{teo}}{c_{teo}} \cdot 100\% = \frac{3119609178\,{}^{m}\!/_{s} - 299792458\,{}^{m}\!/_{s}}{299792458\,{}^{m}\!/_{s}} \cdot 100\% = 4{,}06\%$$

Der er altså tale om en meget lille afvigelse fra den teoretiske værdi, hvilket må siges at være en meget god præstation med det udstyr og den metode, der benyttes i dette forsøg. Regner vi til gengæld på de relative usikkerheder i forsøget, ser situationen straks anderledes ud.

Usikkerheden på den beregnede værdi for lysets hastighed er udtrykt ved følgende formel:

$$\frac{\Delta c_{beregn}}{c_{beregn}} = \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta\nu}{\nu} \Leftrightarrow \Delta c_{beregn} = \left(\frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta\nu}{\nu}\right) \cdot c_{beregn}$$

Jeg har vurderet præcisionen af afmålingerne og udstyrets på bilaget, hvor det fremgår, hvad delta-værdierne er. Indsættes vores beregnede værdi i denne formel finder vi nu usikkerheden:

$$\Delta c_{beregn} = \left(\frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta\nu}{\nu}\right) \cdot c_{beregn} \Leftrightarrow \Delta c_{beregn} = \left(\frac{0{,}02cm}{0{,}34cm} + \frac{0{,}5Hz}{553{,}5Hz}\right) \cdot 311960917{,}8\,{}^{m}\!/_{s} \Leftrightarrow$$

$$\Delta c_{beregn} = 18632449{,}74\,{}^{m}\!/_{s}$$

Resultatet af lysets hastighed ved denne måling angives derfor nu:

$$\underline{c = 311980917{,}8\,{}^{m}\!/_{s} \pm 18632449{,}74\,{}^{m}\!/_{s}}$$

Det bemærkes, at den teoretiske værdi for lysets hastighed i dette tilfælde vil ligge en smule højere den beregnede minus usikkerheden, hvorfor den beregnede værdi må siges at være beregnet til at være for høj. Dette viser sig at være en generel tendens ved forsøgsresultaterne. Søjlen, hvor usikkerheden er trukket fra den beregnede værdi for *c*, viser sig at have værdier, der med god tilnærmelse ligger meget tæt på den teoretiske værdi. I den sidste søjle har jeg valgte at tage den beregnede minus usikkerheden og dividere denne med den teoretiske værdi for lysets hastighed. Hermed bliver det mere overskueligt, når vi har værdier, der tilnærmelsesvis er lig med 1. Denne tendens tyder på, at min værdi for positionen af lyspletten, før spejlet roterede, er en smule forkert.

Fejlkilderne i dette forsøg skyldes flere faktorer. Til dels er der jo tale om, at vi benytter tonegeneratoren, der fremkalder rene sinusbølger til at finde stødtonen fra motoren, der drejer spejlet. I denne sammenhæng er det bestemt ikke sikkert, at motoren fremkalder en ren sinusbølge, men derimod en mindre pæn sinuskurve. Dette medførte i forsøget, at vi ikke kunne bestemme den korrekte frekvens præcist, hvorfor der er en usikkerhed på godt og vel 0,5Hz ved brugen af denne metode.

Forsøgets formål – at bestemme en værdi for lysets hastighed – må siges at være vellykket. Vi har bestemt værdier, der, med god tilnærmelse, alle ligger meget tæt på den teoretiske værdi. Dette er gjort med udstyr og måleusikkerheder, der er relativt store i forhold til de værdier, der måles.

Opgaver med relativitetsteori

Jeg har i det følgende afsnit forsøgt at konstruere nogle opgaver, der skal belyse mit teoretiske arbejde med den specielle relativitetsteori.

Opgave 1

Vi forestiller os, at der i et inertialsystem S befinder sig en lampe, der udsender en foton fra punktet $x_1 = 0$ på x-aksen. Fotonen bliver igen absorberet i punktet x_2 i samme system, hvor vi antager, at afstanden mellem udsendelse og absorption er 100m. Fotonen har altså taget tiden t om at tilbagelægge de 100m:

$$t = \frac{x_2 - x_1}{c} \Leftrightarrow t = \frac{100m}{c} \Leftrightarrow t = 3,33 \cdot 10^{-7} s$$

Udsendelsen og absorptionen observeres også fra et andet inertialsystem S', der bevæger sig med hastigheden v i forhold til S. Antager vi, at S' bevæger sig med hastigheden 0,95c vil fotonen, set fra S', have tilbage følgende strækning, før den absorberes:

$$x' = \gamma\left(x - vt\right) \Leftrightarrow x' = \frac{\left(x - vt\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow x' = \frac{\left(100m - 0,95c \cdot 3,33 \cdot 10^{-7} s\right)}{\sqrt{1 - \frac{\left(0,95c\right)^2}{c^2}}} \Leftrightarrow x' = 16,01m$$

Tiden, fotonen, set fra S', brugte på at tilbagelægge de 100m i S er altså:

$$t'=\gamma\left(t-\frac{xv}{c^2}\right)\Leftrightarrow t'=\frac{t-\frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Leftrightarrow t'=\frac{3,33\cdot 10^{-7}s-\frac{100m\cdot 0,95c}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{(0,95c)^2}{c^2}}}\Leftrightarrow t'=5,34\cdot 10^{-8}s$$

Opgave 2

I fremtiden bliver det sikkert muligt at få rumskibe, der er kraftige nok til at opnå hastigheder, der nærmer sig lysets hastighed. Lad os antage, at vi står på en planet og observerer et sådant rumskib komme forbi med en hastighed på 0,9c. Vores system på planeten kalder vi for S, mens vi kalder systemet med rumskibet for S'. I S' er der nogle elektriske signaler med en hastighed på 0,2c. Hvilken hastighed har disse signaler så, når vi observerer dem fra S? Vi benytter relativistisk hastighedsaddition:

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}}\Leftrightarrow u=\frac{0,2c+0,9c}{1+\frac{0,9c\cdot 0,2c}{c^2}}\Leftrightarrow u=0,93c$$

Det bemærkes, at hastighederne set fra S ikke overstiger lysets hastighed. Dette står i kontrast til den hastighed signalerne ville have fået, såfremt vi benyttede Galileitransformationen til at beregne den. Benyttes disse ville signalerne have fået hastigheden: $u'=u+v\Leftrightarrow u'=0,9c+0,2c\Leftrightarrow u'=1,1c$, hvilket ifølge Einsteins antagelse ikke kan lade sig gøre. Hermed står vi med et eksempel på, hvor Galileitransformationen ikke kan beskrive hastighederne.

Vi antager nu det omvendte. Lad os sige, at vi ønsker at bestemme hastigheden af de elektriske signaler på rumskibet, og det eneste vi ved, er rumskibets hastighed samt den hastighed, signalerne bliver observeret til at have i S. Vi benytter igen relativistisk hastighedsaddition:

$u'=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}\Leftrightarrow u'=\frac{0,93c-0,9c}{1-\frac{0,93c\cdot 0,9c}{c^2}}\Leftrightarrow u'=0,2c$, hvilket jo også stemmer overens med, hvad vi tidligere antog, signalerne havde.

Forestiller vi os, at vi på planeten også havde et rumskib af samme slags som det, der flyver forbi planeten med hastigheden 0,9c, vil vi nu undersøge, hvor langt og hvor tungt det forbipasserende rumskib er. I denne sammenhæng antager vi, at rumskibet i hvile på planeten er 1500m langt og vejer 50000kg. Vi benytter længdeforkortelse- og masseforøgelsesfunktionerne til at bestemme værdierne for rumskibet i bevægelse:

$$l' = \gamma l \Leftrightarrow l' = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow 1500m = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{(0,9c)^2}{c^2}}} \Leftrightarrow l = 653,83m$$

$$m = m_0 \cdot \gamma \Leftrightarrow m = 50000kg \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow m = \frac{50000kg}{\sqrt{1-\left(\frac{0,9c}{c}\right)^2}} \Leftrightarrow m = 114707,97kg$$

Opgave 3

I den stråling, der rammer jorden befinder der sig såkaldte pi-mesoner. Disse har en halveringstid på $2,6 \cdot 10^{-8} s$, men alligevel bliver de registreret ved jordens overflade. Vi antager, at de kommer med hastigheden 0,999c, hvorfor vi nu kan udregne den strækning, de kan tilbagelægge i deres levetid:

$$\Delta s = 2,6 \cdot 10^{-8} \cdot 0,999c \Leftrightarrow \Delta s = 7,786m$$

Hvordan kan det nu være, at mange af disse alligevel registreres på overfladen? Ved hastigheden 0,999c er opfattelsen af længde og tid anderledes end ved de lave hastigheder. Kigger vi i første omgang på mesonen fra jorden, vil vi bemærke, at middellevetiden er ændret i forhold til pi-mesonens eget system. Vi kalder jordsystemet for S, der er i hvile i forhold til mesonens system S':

$$\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma \Leftrightarrow \Delta t = 2,6 \cdot 10^{-8} s \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,999c)^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \Delta t = 5,815 \cdot 10^{-7} s$$

I løbet denne tid kan mesonen altså tilbagelægge (stadigvæk set fra S):

$$\Delta s = 0,999c \cdot 5,815 \cdot 10^{-7} s \Leftrightarrow \Delta s = 174,16m$$

Kigger vi nu på situationen fra mesonens system og lader dette være hvilesystemet, vil afstanden fra mesonen til jorden blive opfattet anderledes. Den afstand, der fra jordsystemet blev opfattet som de 174,16m bliver fra mesonsystemet opfattet som:

$$l' = \gamma l \Leftrightarrow 174,16m = \gamma l \Leftrightarrow 174,16m = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0,999c}{c}\right)^2}} l \Leftrightarrow l = 7,78m$$

Det bemærkes, at denne længde jo netop er den længde, mesonen i sit eget system kan nå at tilbagelægge i middellevetiden. Selvom to iagttagere, en fra mesonsystemet og en fra jorden, har to forskellige længde- og tidsopfattelser, er det nu klart, at de begge beregner, at mesonen kommer ned til jordoverfladen.

Konklusion

Ved at komme med sin relativitetsteori i starten af 1900-tallet revolutionerede Einstein fysikken. Han viste, at hverken tid, længder eller masser var absolutte størrelser men alle var relative i forhold til, hvordan de blev observerede. Dette betyder med andre ord, at en person i hvile ikke vil observere den samme tid som en person i jævn bevægelse i forhold til den hvilende person. På tilsvarende måde betyder det, at en person i hvile ikke vil måle samme længde af et objekt, som en person i jævn bevægelse ville. Sagt mere generelt, vil to observatører ikke være enige om tiden imellem to begivenheder og ej heller længden eller massen af det objekt, der er i bevægelse i forhold til den ene. En observatør i translativ bevægelse vil opleve et længere tidsforløb, længder kortere og objekter mere massive i forhold til, hvad en observatør i hvile. Relativiteten opstår i og med, at begge observatører har ret i deres anskuelser. Konsekvenserne af denne relativitet er enorme og interessante. Den klassiske fysik har ikke kunnet forklare, hvorfor der forsvinder masse ved radioaktiv stråling, fission eller fusion, hvorfor det har været nødvendigt at gribe fat i relativitetsteoriens forklaring på ækvivalensen mellem masse og energi. Relativitetsteorien er altså et redskab, der benyttes til at forklare meget mere komplicerede processer, end man tidligere har kunnet.

Hvad betyder disse konsekvenser så for det moderne menneske? I hverdagen er det jo ikke ligefrem noget, vi går rundt og tænker over, og det er de færreste mennesker, der rent faktisk ved, hvad relativitetsteorien går ud på. Når en person går tur med en hund og vedkommende stopper op og lader hunden, der vejer 7½ kg, løbe lidt frem og tilbage på en græsplæne, vil vi have to forskellige inertialsystemer: den løbende hund og personen i hvile. Massen af hunden vil faktisk tiltage i det hvilende system i forhold til hundes eget system. Et kvalificeret gæt på hastigheden af en hund er omkring 15 km/t, og med denne hastighed vil hundens masse forøges med en mængde, der er så lille, at ikke engang min lommeregner kan regne den ud. Kunne hunden derimod bevæge sig med en hastighed på 90% af lysets ville masse tiltage med cirka 10 kg. Det vil sige, at relativitetsteorien faktisk ikke betyder noget i hverdagen. Faktum er jo, at denne teori først og fremmest kommer til udfoldelse, når hastighederne for systemer nærmer sig lysets hastighed. Selv hastigheder på $0{,}1c$ vil ikke være nok. Beskæftiger man sig derimod med mekanik ved lysets hastigheder eller med kernefysik, skal man kende til relativitetsteorien.

Den specielle relativitetsteori arbejder kun i inertielle rammer, som det også blev nævnt i afsnittet, hvor jeg definerede en begivenhed. Dette var Einstein ikke tilfreds med, så cirka 10 år efter han udgav den specielle relativitetsteori, udgav han den, hvad der senere ville blive kendt som den generelle relativitetsteori. Denne er dog for stor en mundfuld at behandle, hvorfor jeg kun kort lige vil ridse forskellene op. Udover den allerede nævnte med accelererende rammer, er det meget almindeligt at nævnte, at den specielle relativitetsteori behandler store hastigheder, mens den generelle mere kommer ind på store masser og tyngdekræfterne imellem disse. Den specielle relativitetsteori såvel som den generelle, er blevet bekræftet adskillige gange vha. eksperimenter. Tidsforlængelse er blevet konstateret ved at kigge på halveringstiden af ustabile nuklider i høj fart, hvor det er blevet bevist, at de ved en relativistisk høj fart har en tidsforlængelse, der med meget god tilnærmelse svarer nøjagtigt til faktoren γ. Alt i alt er den specielle relativitetsteori ikke noget almindelige mennesker går og undrer sig over til hverdag, men den er dog blevet en af grundstenene i den moderne fysik på samme måde som kvantemekanikken er blevet det.

Kristian Jerslev

Litteraturliste

Bøger:

- Andersen, Erik Strandgaard; Jespergaard, Paul; Østergaard, Ove Grønbæk: "Databog fysik kemi", F&K Forlaget, 6. udgave 1. oplag.
- Andersson, Bengt; Johansson, Karl-Erik; Staffansson, Eve: "Fysik i Grundtræk, 2B Ellære", Munksgaard 1980.
- Gjøe, Tommy; Jespersen, Lis; Keller, Ole; Møller, Jan; Vaaben, Jens: "Orbit 2", Systime 2003
- Red.: Hansen, Ib Fischer; Jørgensen, Jens Anker; Michaelsen, Knud; Sørensen, Jørgen; Tonnesen, Lars: "Litteraturhåndbogen", Gyldendal1981.
- Hawking, Stephen W.: "Hawkings Univers", Gyldendal 1988.
- Knudsen, Ole; Pedersen, Olaf: "Lærebog i mekanik 2. del", Akademisk Forlag 1975.
- Kragh, Helge: "tid", F&K Forlaget 1986.
- Pihl, Mogens; Storm, Henning: "Lærebog i FYSIK 2", Gads Forlag 1973.
- Pihl, Mogens; Storm, Henning: "Fysiske Øvelser 2A", 3. udgave 1973.
- Uggerhøj, Ulrik: "Tid: Den relative virkelighed", Århus Universitetsforlag 2005.

Internetsider:

- http://ga.randers-hf-vuc.dk/matlex/relativi.html#massefunktion
- http://da.wikipedia.org/wiki/Speciel_relativitetsteori
- http://en.wikipedia.org/wiki/Special_relativity
- http://da.wikipedia.org/wiki/Lorentz-transformation
- Kilde til figur 5: http://content.grin.com/binary/hade/25168/180.gif

Diasshow:

Følgende link er til et diasshow jeg så, da jeg var i studiepraktik på Århus Universitet. Det er et show om Einstein og relativitet. Det blev holdt af Ulrik Uggerhøj. Bemærk, at filen er stor og kræver Microsoft Powerpoint for at kunne vises.

- http://whome.phys.au.dk/~ulrik/Einstein_Ulrik.ppt

Andet:

- Den Store Danske Encyklopædi (elektronisk udgave)

Bilagsoversigt

Følgende bilag er vedlagt opgaven:

- Bilag A: En liste over Galileitransformationens formler.

- Bilag B: Forsøgsvejledningen til forsøget, der behandles i opgaven.

- Bilag C: En samlet liste over forsøgsresultaterne og usikkerhedsberegningen på resultaterne fra forsøget, der behandles i opgaven.

Bilag A

Galileitransformationen

Galileitransformationen er beskrivelsen af sted og tid i den klassiske fysik. Formlerne ser således ud:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} x = x' - vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

For addition af hastigheder ser formlerne således ud:

$u' = u + v$ og $u = u' - v$

Bilag C

Bestemmelse af lysets hastighed

r	5,075	m
L	30,048	m

Måling	ν / Hz	ω / s^{-1}	s / cm	$c_{beregnet}$ / (m/s)	Relative afvigelse
1	553,5	3477,74	0,34	311960917,8	4,06 %
2	341,5	2145,71	0,2	327206704,3	9,14 %
3	439,9	2763,97	0,3	280992150,7	-6,27 %
4	514,0	3229,56	0,31	317733426,5	5,98 %
5	424,0	2664,07	0,23	353264097,3	17,84 %
6	363,0	2280,80	0,21	331244603,4	10,49 %

Usikkerhedsberegning

Δs	0,02	cm
Δv	0,5	Hz

Måling	Usikkerhed	$c_{beregnet}$ + usikkerhed	$c_{beregnet}$ - usikkerhed	Forhold
1	18632449,74	330593367,5	293328468,1	0,9784385
2	33199743,2	360406447,5	294006961,1	0,9807017
3	19052191,9	300044342,6	261939958,8	0,8737377
4	20808009,95	338541436,5	296925416,6	0,9904366
5	31135202,18	384399299,5	322128895,1	1,0745063
6	32003364,87	363247968,2	299241238,5	0,9981613