Friedmannligningen

Kristian Jerslev

14. december 2008

Antaget viden om Friedmannligningen op til punktet, hvor man kender ligningen på formen

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} \tag{1}$$

Hernæst følger, at der tages højde for energi på grund af Einsteins masse-energirelation. Det vil sige, at tyngden også afhænger af energitætheden i universet, ϵ. Ved nu at erstatte ρ med $\frac{\epsilon}{c^2}$ fås følgende form af Friedmannligningen.

$$H(t)^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3c^2} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} \tag{2}$$

hvor $H(t) \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)$ er den såkaldte Hubbleparameter. Fra denne ligning følger det, at fortegnet på krumningsparametren, κ er givet ved $\epsilon - \epsilon_c$, hvor ϵ er den kritiske energitæthed, som er givet ved

$$\epsilon_c = \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2. \tag{3}$$

Ofte er det mere praktisk at benytte en omskrivning, der bruger en relativ størrelse i forhold til ϵ_c. Denne størrelse kaldes $\Omega(t) = \frac{\epsilon}{\epsilon_c}$. Ved denne størrelse kan Friedmannligningen omskrives til

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}. \tag{4}$$

Højresidens fortegn kan bestemmes ud fra nuværende kosmologiske parametre, men det er en helt anden diskussion, som jeg ikke vil komme ind på her.

Under antagelse af, at universet er adiabatisk, dvs. uden varmeudveksling, kan vi finde en energiligningen for det. Her benyttes termodynamikkens første hovedsætning som udgangspunkt.

$$0 = \dot{Q} = \dot{E} + P\dot{V} \tag{5}$$

hvor $\dot{Q}$ er hastigheden af varmetilførsel i et område, $\dot{E}$ er hastigheden af energitilførsel og P er trykket. V er volumen af det givne område, og dette udvider sig proportionalt med skalafaktoren i tredje potens; $\dot{V} = 3\frac{\dot{a}}{a}V$. Yderligere ses let, at $E = \epsilon V$ og ved differentiering og brug af kædereglen fås, $\dot{E} = \dot{\epsilon}V + \epsilon\dot{V}$. Indsættes nu i termodynamikkens første hovedsætning fås,

$$0 = V\left(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P)\right) \tag{6}$$

$$= \dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) \tag{7}$$

Med denne ligning i baghånden kan vi nu udlede et udtryk for universets acceleration. For at gøre dette tages udgangspunkt i Friedmannligningen som nævnt ovenfor. Multipliceres med a^2 på begge sider opnås,

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\dot{\epsilon}a^2 + 2\epsilon a\dot{a}) \Leftrightarrow \tag{8}$$

$$\dot{\epsilon}\frac{a}{\dot{a}} = -3(\epsilon + P) \Leftrightarrow \tag{9}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P), \tag{10}$$

ved brug af energiligningen for universet som udledt ovenfor.

For at komme videre herfra skal vi finde en sammenhæng imellem tryk og energitæthed for en given komponent i universet. Det viser sig, at dette kan opskrives op måden $P = \omega\epsilon$, hvor ω er en stofparameter, der er forskellig for forskellige komponenter.

Hvis det viser sig, at de forskellige bidrag til energitætheden ikke vekselvirker med hinanden kan man benytte ligning (7) for hver komponent seperat. Benyttes dette fås for hver komponent,

$$\frac{\dot{\epsilon_\omega}}{\epsilon_\omega} = -3(1+\omega)\frac{\dot{a}}{a}, \tag{11}$$

eller tilsvarende,

$$\epsilon_\omega = \epsilon_{\omega,0}a(t)^{-3(1+\omega)}, \tag{12}$$

hvor det antages, at ω er konstant. Det gælder, at for ikke-relativistisk stof er $\omega_m = 0$, for stråling (og andet ekstremrelativistisk stof) er $\omega_r = \frac{1}{3}$ og for mørkt stof er $\omega_\Lambda = -1$.

Det viser sig, at universet er utrolig fladt og dermed med en $\Omega_0 = 1 \Rightarrow \kappa = 0$ og en given komponent, der dominerer over de andre, kan Friedmannligningen igen omskrives til,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon_{c,0}a^{-3(\omega+1)} = H_0^2 a^{-3(\omega+1)}, \tag{13}$$

eller omskrevet,

$$\int_0^a a^{\frac{1+3\omega}{2}}da = H_0\int_0^t dt = H_0 t, \tag{14}$$

og dermed,

$$a(t) = \left(\frac{3H_0(1+\omega)t}{2}\right)^{\frac{2}{3+3\omega}}. \tag{15}$$

I et univers domineret af almindeligt stof, $\omega \cong 0$ fås nu skalafaktoren som funktion af tiden,

$$a(t) = \left(\frac{3H_0(1+0)t}{2} \right)^{\frac{2}{3+3\cdot 0}} = \left(\frac{3h_0 t}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \propto t^{\frac{2}{3}} \tag{16}$$