

Modtaget dato:

Godkendt:

Dato:

Underskrift:

(forbeholdt instruktør)

Kursus i eksperimentelle øvelser, øvelse 5: Fermifordeling for metaller

Kristian Jerslev, Kristian Mads Egeris Nielsen, Mathias Brønd Christensen
Hold nummer 10, Institut for Fysik og Astronomi, Aarhus Universitet, Danmark
(Dated: 11. december 2008)

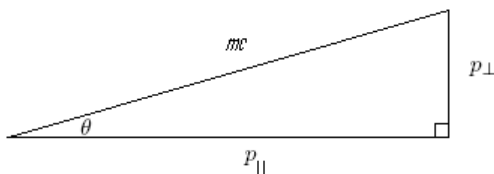
Ved positron-elektron annihilation i metaller kan vinkelfordelingen af de udsendte γ -kvanter relateres til Fermienergien. Vi har i dette forsøg undersøgt Fermienergien for hhv. Germanium og Aluminium og bestemt disse til hhv. $E_F = 6.0 \pm 1.4eV$ og $E_F = 9.36 \pm 0.42eV$

I. INDLEDNING

Valenselektronerne i et metal betragtes. En beskrivelse af hastighedsfordelingen må overholde udelukkelsesprincippet samt sørge for, at energierne går mod de laveste tilstande, når temperaturen går mod nul. En sådan fordeling blev fundet af "Fermi & Dirac". Fermi-Dirac fordelingen er givet ved:

$$f_{FD}(v) = \frac{\text{konst}}{1 + \exp\left(\frac{\frac{1}{2}mv^2 - k_b T_F}{k_b T}\right)}$$

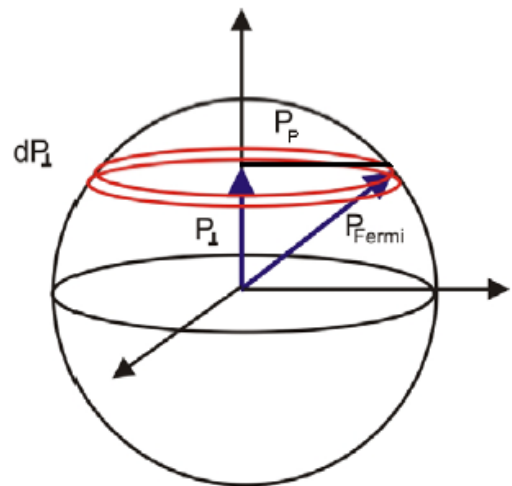
Fordelingen fremkommer ved, at udelukkelsesprincippet forhindrer elektronerne i at have samme hastighed, så selv ved lave temperaturer, må der være en del elektroner med meget høje energier. Ved lave temperaturer vil alle elektronerne have energier mindre end en bestemt værdi, som kaldes Fermienergien, E_F . Den tilhørende impuls, p_F , udgør så en maksimal impuls for elektronerne. Under annihilation mellem en positron og elektron vil spredningen af impulsen af kvanterne kun afhænge af spredningen i energierne af valenselektronerne. Den maksimale spredning af impulsen i ordinataksens retning må så være lig p_F . Denne kan relateres til vinklen på følgende simple måde ved hjælp af figur 1:



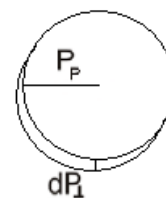
Figur 1: Impulsdiagram.

$$\sin \theta \cong \theta \cong \frac{p_{\perp}}{mc}$$

Tætheden af tilstande i Fermikuglen (se figur 2) vil være konstant, så antallet af tilstande med en impuls i intervallet dp_{\perp} kan udregnes ved hjælp af tykkelsen af en skive i Fermikuglen med bredde dp_{\perp} , altså



Figur 2: Fermikuglen.



Figur 3: Cirkelskive i Fermikuglen.

Det ses let, at $p_F^2 = p_p^2 + p_{\perp}^2 \Rightarrow p_p^2 = p_F^2 - p_{\perp}^2$.

$$N = f(p_{\perp}) \cdot dp_{\perp} = \int_V (n \cdot dV) = nV$$

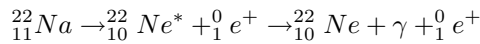
Hvor N er antallet af tilstande, n er tætheden af tilstande og $f(p_{\perp})$ er fordelingen af impulser. Radius i cirklen kan betragtes som værende tilnærmelsesvis ens i p_{\perp} og $p_{\perp} + dp_{\perp}$ og dermed fås ved hjælp ved figur 3:

$$V = \pi n p_p^2 \cdot dp_{\perp} = \pi (p_F^2 - p_{\perp}^2) n \cdot dp_{\perp}$$

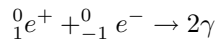
$$N = f(p_{\perp}) \cdot dp_{\perp} \propto (p_F^2 - p_{\perp}^2) n \cdot dp_{\perp}.$$

II. FORSØGSBESKRIVELSE

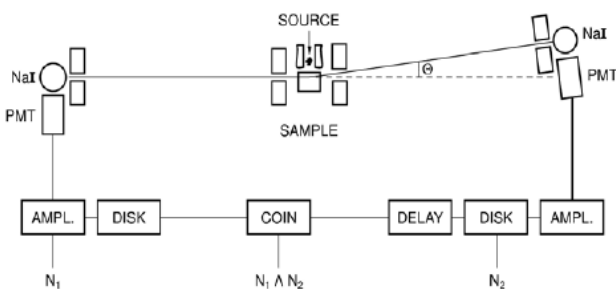
Vi udnytter i dette forsøg en radioaktiv natriumisotop, der henfalder, som vist nedenfor:



I forsøget placerer vi prøver af henholdsvis Germanium og Aluminium under ovenstående kilde, og dermed bliver disse stoffer beskyttet med positroner. Når positronerne rammer metallerne vil de møde en elektron og ofte annihilere efter følgende reaktion:



hvor $\gamma = 2 \cdot 511 \text{keV}$. Da vi er ude efter fordelingen af valenselektronerne, vil vi udnytte, at sandsynligheden for en annihilation er uafhængig af hastigheden af elektronerne i metallerne, og dermed vil vi kunne udnytte fordelingen af positronernes impuls til bestemme impulsfordelingen af elektronerne. Impulsfordelingen bestemmes ved hjælp af to NaI detektorer, der hver er $2.5m$ fra kilden. En af detektorerne holdes fast, mens den anden roteres om en akse, der går igennem vores metal. Opstillingen er vist skematisk på figur 4.



Figur 4: Forsøgsopstillingen.

Vi opnår yderligere et bidrag til vinkelfordelingen fra coreelektronerne samt fra tilfældig baggrundsstråling.

Coreelektronerne er de elektroner, der ikke befinder sig i valensbåndet, og vi er derfor ikke interesserede i disse. Eksperimentelt kan det vises, at coreelektronernes vinkelfordeling kan approksimeres med en Gaussfordeling, så der fittes en Gausskurve til disse. Coreelektron-samt baggrundsbidrag fratrækkes under databehandlingen.

III. OPGAVER

Vi skal beregne strålingsdosishastigheden fra vores ${}^{22}\text{Na}$ kilde. Kildens aktivitet er målt til $2mCi = 74 \cdot 10^6 Bq$ den 1/9-94, og vi kan beregne aktiviteten efter 14 år ved benyttelse af kildens halveringstid, der er tabelopslået til $T_{\frac{1}{2}} = 2,602r$

$$A(t) = A_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}} \Rightarrow A(14) = 74 \cdot 10^6 Bq \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{14}{2,602}} = 1,78 \cdot 10^6 Bq$$

Ud fra aktiviteten kan man beregne dosishastigheden ved formelen fra [2]:

$$D' = 0.17 \mu_{en-m} E_{\gamma} a_{\gamma} \frac{A}{R^2} \left[\frac{Gy}{h} \right]$$

hvor μ_{en-m} er masseenergiabsorptionskoefficienten som er specifik for det materiale, der blokerer (i denne beregning er det luft), E_{γ} er energien af gammakvanterne i MeV, a_{γ} er antallet af kvanter per henfald, A er aktiviteten i Ci og R er afstanden i m . Der betragtes kun overgangen med $E = 1275 \text{keV}$, så $a_{\gamma} = 1$, μ_{en-m} kan findes i tabellen i [2] og afstanden udregnes ved $0.5m$.

$$D' = \frac{0.17 \cdot 0.0265 \cdot 1.275 \cdot 1 \cdot 48.1 \cdot 10^{-6} Gy}{0.5^2} = 1.105 \frac{\mu Gy}{h}$$

For at vurdere udtrykket kigges på dosisækvivalens hastigheden, $D'_{eq} = D' \cdot QF$ hvor QF er 1 for gammakvanter, så

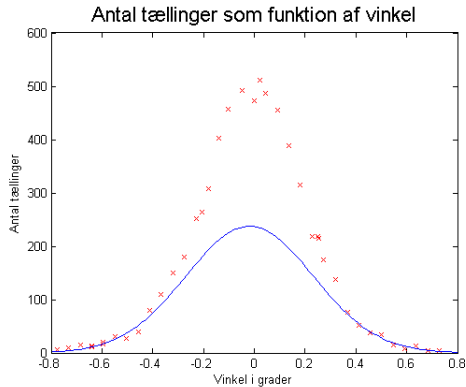
$$D'_{eq} = 1.105 \frac{\mu Sv}{h} = 1.105 \cdot 10^{-3} \frac{mSv}{h} \cong 10 \frac{\mu Sv}{y}$$

hvilket er under den farlige grænse ($20 \frac{mSv}{y}$). Med blyafskærmning vil den årlige dosis være endnu mindre og dermed også under den farlige grænse.

IV. BESTEMMELSE AF E_F FOR GERMANIUM

Sammenhørende værdier for detektorens højde (og dermed vinklen θ) og antal koincidente målinger måles med tidsintervaller på $200s$. Da vi ikke kender til forholdet imellem højden og nulpunktet for vinklen θ , bestemmes denne under dataarbejdet som det sted, hvor antallet af koincidente tællinger er på sit højeste.

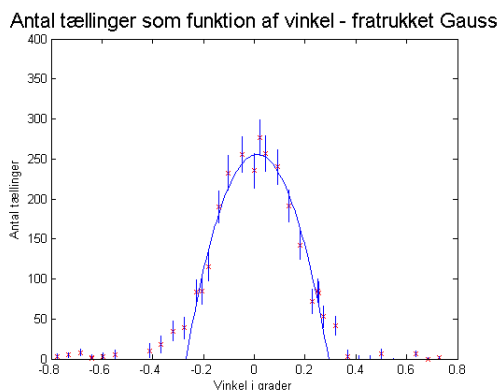
I figur 5 er fordelingen af coreelektroner vist fittet til en Gaussfordeling. Som det bemærkes er der god overensstemmelse med, at disse opfylder en normalfordeling.



Figur 5: Coreelektronerne har en bredere fordeling end valenselektronerne. Her er coreelektronfordelingen fittet til en Gaussfunktion for Germanium.

Coreelektronbidraget fratrækkes fordelingen af valenselektroner og en parabel fittes. Dette kan ses i figur 6, hvor parabelfittet bestemmes til:

$$y = -3233x^2 + 75.73x + 255.2$$



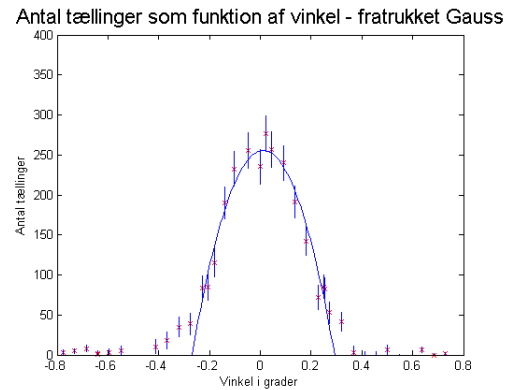
Figur 6: Valenselektronernes fordeling fittet til en parabel for Germanium. Bidraget fra coreelektronerne er trukket fra.

Ved at betragte skæringen med 1. akse for dette fit bestemmes Fermivinklen, θ_F . For Germanium er denne bestemt til $\theta_F = 0.28 \pm 0.03^\circ = 4.91 \pm 0.51 \text{ mrad}$ og ud fra denne bestemmes Fermienergien til

$$E_F = 6.0 \pm 1.4 \text{ eV}$$

Fra [1] ses det, at denne gruppe fandt en Fermivinkel på cirka 7 mrad (bemærk enheden: rad , ikke eV), så vores resultater ligger under disse.

V. BESTEMMELSE AF E_F FOR ALUMINIUM



Figur 7: Valenselektronernes fordeling fittet til en parabel for Aluminium. Bidraget fra coreelektronerne er trukket fra.

På samme måde som for Germanium findes Fermivinklen for aluminium. Parabelfittet fra figur 7 bestemmes til:

$$y = -2272x^2 - 10.6x + 278.4$$

og hermed bestemmes Fermivinklen til $\theta_F = 0.35 \pm 0.012^\circ = 6.12 \pm 0.02 \text{ mrad}$ og Fermienergien bestemmes dermed til

$$E_F = 9.36 \pm 0.42 \text{ eV}$$

Fra [2] fås Fermienergien for Aluminium til 11.7 eV og vores resultat ligger dermed under den teoretiske værdi.

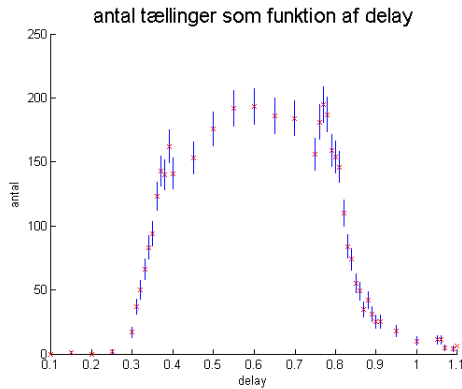
VI. BESTEMMELSE AF MAKSIMAL DELAY

Sammenhørende værdier for delay, ΔT og koincidente tællinger måles fra $\Delta T = 0.1 \mu\text{s}$ til $\Delta T = 1.1 \mu\text{s}$. Disse målinger plottes, som det kan ses på figur 8. Ud fra denne figur måles bredden af plateauet på grafen, da bredden angiver det maksimale delay, hvor vi opnår koincidente tællinger, som vi kan arbejde med. Bredden bestemmes til:

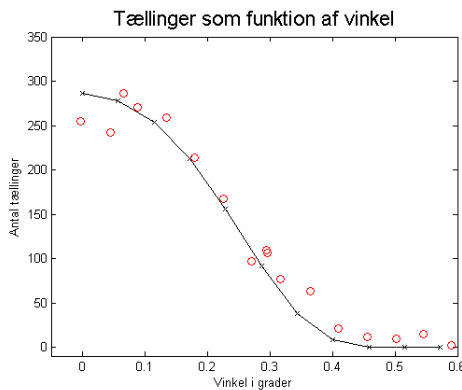
$$\Delta T = 490 \pm 40 \text{ ns.}$$

VII. SAMMENLIGNING MED TEORETISK FORDELING

Da θ_F for aluminium i vores forsøg er bestemt til cirka 6 mrad benyttes fordelingen skrevet under 6 mrad fra øvelsesvejledningen til at give en teoretisk fordeling, vores data kan sammenlignes med. Den teoretiske og eksperimentelle fordeling er plottet i figur 9. Den teoretiske



Figur 8: Antallet af koincidente tællinger plottet som funktion af ΔT .



Figur 9: Teoretisk fordeling (kurven) for valenselektronerne vist sammen med den eksperimentelt målte fordeling (cirklerne)

fordeling er normeret til vores data, så den teoretiske fordeling opnår maksimalt antal koincidente tællinger ved vores maksimale værdi. Som det fremgår af figuren, er der pæn overensstemmelse imellem den teoretiske fordeling og vores eksperimentelt bestemte.

VIII. KONKLUSION

Med to NaI-detektorer har vi fundet Fermienergien for Aluminium og Germanium til hhv. $E_F = 9.2 \pm 0.4 eV$ og $E_F = 7.8 \pm 1.4 eV$. Endvidere har vi fundet den maksimale tid, der kan være imellem to tællinger til, at de kan kaldes for koincidente, og denne tid er bestemt til $\Delta T = 490 \pm 40 ns$.

Vores resultater for Fermienergiene ligger konsekvent under de teoretiske værdier, og vi har derfor en systematisk fejl, der gør vores forsøgsresultater dårligere, og dermed kan vi ikke opnå den præcision, der skal til for at få vores resultater til at ligge tættere på de teoretiske værdier. Et bud på vores systematiske fejl kan være, at vi er kommet til at fitte for mange valenselektroner med, da vi fittede Gaussfordelingen på coreelektronerne. Hvis dette er tilfældet, vil Gaussfordelingen give et for stort bidrag til vinkelfordelingen, og dermed vil parablen blive smallere og vi vil opnå en lavere Fermivinkel og dermed Fermienergi.

En anden fejlkilde er en mulig medtagning af for mange valenselektroner, da normalfordelingen fittes. Ved at tage for mange med vil parablen også blive smallere og vi vil dermed opnå en lavere Fermivinkel.

[1] *Physical Review*, Vol. 108, number 4, november 15, 1957: *Angular Correlation of Radiation in Various Substances*. G. Lang and S. DeBenedette, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pennsylvania.

[2] *Øvelser i eksperimentel fysik - øvelsesvejledninger*. Efterår 2008, Institut for Fysik og Astronomi, Aarhus Universitet.