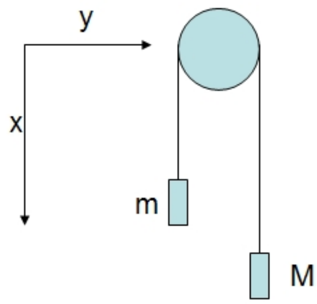
Analyse af Atwoods faldmaskine med Lagrangeformalismen

Kristian Jerslev

3. oktober 2008

Som simpelt eksempel af anvendeligheden af Lagrangeformalismen benyttes her Atwoods faldmaskine, der i alt sin enkelthed er to lodder med forskellig masse ophængt over en masseløs trisse. Opstillingen ses nedenfor.



Koordinatsystemet er valgt, som det fremgår af figuren. En x-akse lodret nedad og en y-akse vandret. I dette eksempel vil vi dog ikke få brug for y-aksen, men den er medtaget af overskuelighedsårsager.

Lad os påbegynde vores analyse af opstillingen ved hjælp af Lagrangeformalismen. Vi starter med at finde den generaliserede koordinat - systemet har 1 frihedsgrad, så der skal kun én generaliseret koordinat til at beskrive opstillingen. Denne koordinat vælges som stedkoordinaten for loddet med massen m. Da længden på snoren, l, er konstant kan vi nu opskrive positionen af begge lodder som følger.

$$s_m = x$$
$$s_M = l - x$$

Differentieres ovenstående udtryk med hensyn til tiden for at finde hastighederne af de to lodder til enhver tid fås:

$$\frac{ds_m}{dt} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$
$$\frac{ds_M}{dt} = \frac{d(l-x)}{dt} = -\dot{x}$$

Lagrangefunktionen defineres.

$$\mathcal{L} = T - U \Leftrightarrow$$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - mgx - Mg(l-x) \Leftrightarrow$$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 - g(mx + M(l-x))$$

Nu indsættes i Lagrangeligningen for at finde den bevægelsesligningen for systemet.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \tag{1}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 - g(mx + M(l-x))) = g(M-m) \tag{2}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 - g(mx + M(l-x)))$$
$$= \frac{d}{dt}((M+m)\dot{x}) = (M+m)\ddot{x} \tag{3}$$

Indsættes (2) og (3) i (1) fås:

$$g(M-m) = (M+m)\ddot{x} \Leftrightarrow$$
$$\ddot{x} = \frac{g(M-m)}{M+m} \tag{4}$$

Hermed er accelerationen af loddet med massen m givet ved (4), og da dette udtryk ikke indeholder nogen variabel indses bevægelsen at være en konstant accelereret bevægelse. Ud fra dette er det hurtigt at finde stedfunktionen, og det vil jeg derfor ikke gøre her.

Det skal til slut bemærkes, hvordan båndene i vores opstilling er indbygget i Lagrangeligningerne. Desuden er der på intet tidspunkt tale om en analyse af de krafter, der virker på hvert lod, selvom det (i dette tilfælde) ville være en nemmere måde at løse opgaven på. Fordelen ved Lagrangeformalismen er, at eventuelle bånd på et system ikke behøver at blive overvejet, i det de automatisk indgår i ligningerne.